КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ К.И. СКРЯБИНА

На правах рукописи

УДК 622.33.013.3(575.2) (043.03)

Ботоканова Бактыгул Асанкожоевна

ОЦЕНКА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВОВ ВОКРУГ НАПОРНЫХ ТУННЕЛЕЙ МЕТОДОМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Специальность: 25.00.20 - геомеханика, разрушение пород взрывом, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
д.т.н., профессор
Жумабаев Бейшенбек

Бишкек - 2022

О Г Л А В Л Е Н И Е

ВВЕДЕНИЕ…… 5

ГЛАВА 1. МЕТОДИКА И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВОВ ВОКРУГ ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ ТУННЕЛЕЙ

1.1. Математические основы метода исследования……... 12

1.2. Методические основы оценки напорного состояния вокруг гидротехнических туннелей……. 19

1.3. Краткий обзор работ, сведения с оценкой состояний массивов вокруг туннелей……. 27

ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 1……... 30

ГЛАВА 2. ОЦЕНКА НАЧАЛЬНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ГОРНОГО МАССИВА

2.1. Общая методика моделирования напряженного состояния массивов вокруг туннелей…… 33

2.2. Начальное состояние массива одиночной горы…… 35

2.3. Начальное напряженное состояние массива каньона, ограниченного параболическим цилиндром……..... 38

2.4. Начальное напряженное состояние массивов межгорных впадин. 43

2.5. Начальное напряженное состояние массива речного каньона…… 50

ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 2…… 52

ГЛАВА 3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В МАССИВАХ ВОКРУГ ТУННЕЛЕЙ

3.1. Постановка задачи об образовании туннеля в горном массиве……... 53

3.2. Распределение напряжений вокруг туннеля с эллиптическим

(круглым) поперечным сечением…… 63
3.3. Распределение напряжений вокруг туннеля с треугольным поперечным сечением……..... 74
3.4. Распределение напряжений вокруг туннеля с овальным поперечным сечением……... 78
3.5. Напряженное состояние туннелей с трапециевидным поперечным сечением…… 82
3.6. Расчет напряженного состояния массива вокруг туннеля с сводчатым сечением……... 88
ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 3…… 93

ГЛАВА 4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ВОКРУГ ТУННЕЛЕЙ ОТ ДЕЙСТВИЯ НАПОРА ВОДЫ
4.1. Постановка задачи……..... 94
4.2. Распределения напряжений вокруг туннеля эллиптической и круглой формы от действия напора воды……... 95
4.3. Распределения напряжений вокруг туннеля с треугольным сечением от напора воды…… 98
4.4. Распределение напряжений вокруг туннеля с овальным сечением от напора воды……. 101
4.5. Распределение напряжений вокруг трапециевидного туннеля при действии напора воды…… 106
4.6. Напряженное состояние вокруг сводчатого туннеля от напора воды……. 109
ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 4…….. 114

ЗАКЛЮЧЕНИЕ…… 115
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ……... 117
Приложение 1. Акт внедрения ОсОО ПИ «Ак-Башат» проекта……....

«Строительство малой гидроэлектростанции на реке Козубаглан Лейлекского района, Баткенской области» …… 127
Приложение 2. Акт внедрения результатов исследований в учебный процесс КНАУ им. К.И. Скрябина……... 129
Приложение 3. Акт внедрения результатов исследований в учебный процесс КРСУ им. Б.Н. Ельцина ……. 131

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы диссертации. Разработка полезных ископаемых из недр, а также транспортировка гидроресурсов с помощью туннелей требуют проведения научных исследований по обеспечению устойчивости горных пород вокруг подземного пространства. В горных районах потребность в проведении горных выработок и строительстве транспортных, гидротехнических туннелей велика. Формирование напряжённого состояние массивов вокруг туннелей и горных выработок зависит от многих факторов: влияния склонов гор и впадин, совместное действия силы гравитации, сейсмики, тектонических сил, напора воды и внешних нагрузок. Поэтому оценка напряженного и деформированного состояния массивов горных пород вокруг выработок и туннелей с учетом вышеуказанных факторов является актуальной задачей.

Для оценки состояния массивов горных пород вокруг туннелей и выработок, когда необходимо учитывать выше перечисленных факторов одновременно, традиционные методы: метод разгрузки, ультразвуковое зондирование или метод фотоупругости становятся весьма дорогими и малоэффективными. Использование метода конечных разностей (МКР) или метод конечных элементов (МКЭ), когда высота гор измеряется километрами и поперечные сечения туннелей измеряется метрами, совместных учет разномасштабных факторов крайне сложно для одной и той же модели без потери точности, и надежности моделирования. Полученные результаты с помощью МКЭ и МКР проверяются и сопоставляются с результатами применения других методов.

Таким образом, для расчета напряженно-деформированного состояния массивов пород вокруг горных выработок и туннелей необходимо создать аналитическую модель напряженного состояния массива горных пород вокруг туннелей с учетом рельефа гор, возможного месторасположения, действия гидростатического давления, объемных и тектонических сил.

Связь темы диссертации с основными научно – исследовательскими работами. Результаты диссертации вошли в НИР по заказу Министерства образования и науки Кыргызской Республики. В Кыргызско-Российском Славянском университете им. Б.Н. Ельцина были выполнены следующие проекты:

- Оценка динамики инженерных сооружений (плотин) в горных условиях и выработка методов моделирования механики конструкционных материалов**.** (Отчет 2012 г., стр. 55-77).
- Прочность и деформируемость горных пород при больших давлениях в условиях глубоких выработок и высокогорья**.** (Отчет 2013 г., стр.27-46, Отчет 2014 г., стр.19-44).
- Сейсмическая опасность и сейсмозащита инженерных сооружений в условиях Кыргызстана**.** (Отчет 2016 г., стр.20-32).

Целью диссертационной работы является оценка напряженно-деформированного состояния массивов напорных гидротехнических туннелей, расположенных в горной местности в условиях действия силы гравитации, тектонического сжатия и напора воды методом аналитического моделирования.

Задача исследований:

1. Оценка и аналитическое описание начального напряженного состояния массива горных пород в предполагаемой зоне расположения туннеля с учетом формы горного рельефа, действия гравитационных и тектонических сил.

2. Применение аналитического метода моделирования особенностей рельефа, типовых форм и размеров поперечных сечений туннелей с помощью математического метода конформных отображений полуплоскости выступом или вырезом на вспомогательной полуплоскости и различных форм сечений туннелей на внешности единичного круга.

3. Создание аналитической модели напряженно-деформированного состояния массивов пород вокруг туннелей с учетом его месторасположения и

начального напряженного состояния массива гор, учитывающей совместные или раздельные действия силы гравитации и тектонического сжатия.

4. Аналитическое описание влияния напора воды на перераспределение напряжений вокруг туннелей с учетом типовых форм поперечных сечений в рамках метода Колосово-Мусхелишвили.

5. Создание методики расчета и анализа распределения напряжений, деформаций, смещений вокруг туннелей в условиях влияния различных факторов: форма рельефа горного массива, месторасположение и формы сечений туннеля, действие гравитационных сил, тектонического сжатия и напора воды.

6. Установление закономерностей распределения полей напряжений, деформаций массива горных пород вокруг гидротехнических туннелей при раздельном и совместном влиянии силовых факторов.

Методы исследования включают: метод двумерной теории упругости, аппарата конформных отображений, метод Колосова-Мусхелишвили, использование программного обеспечения MATHCAD, численный расчет и компьютерная графика на ПЭВМ.

Научная новизна работы заключается в следующем:

1. Создан алгоритм расчета и установлены закономерности распределения начального напряженного состояния массивов с горным рельефом в зоне глубокого каньона, ограниченного параболическим цилиндром, одиночной горы с почти вертикальным склоном, межгорной впадины и речного каньона, которое отличающихся от ранее известных результатов других авторов. Результат 1 является частично новым.

2. Определено и аналитически описано напряженно-деформированное состояние массива горных пород вокруг туннелей, учитывающее начальное напряженное состояние горного рельефа, месторасположение и типовые формы сечений туннеля. Результат новый.

3. Дана оценка и аналитическое описание сформировавшемуся напряженному состоянию массивов вокруг туннелей под влиянием напора

воды и перераспределению напряжений вокруг туннелей. Количественные и качественные изменения определяются в зависимости от величины напора воды и типовых форм поперечных сечений, кроме туннелей с круглым сечением. Результат 3 является новым.

4. Создана аналитическая модель и разработана методика расчета напряжений вокруг туннелей в программной среде MATHCAD, допускающая учёт совместных или раздельных действий сил гравитации, горизонтальных тектонических сил, гидростатического напора воды и типовых форм поперечных сечений. Результат 4 является новым.

Теоретическая и практическая и значимость полученных результатов состоит в:

- разработке аналитической модели напряжённого и деформированного состояния массивов вокруг напорных гидротехнических туннелей с учётом действия гравитационных, сейсмических и тектонических сил, а также гидростатического напора;
- применении методики расчета и оценки состояния туннелей, расположенных в горной местности при выполнении оперативной экспертной оценки и принятия инженерных решений;
- разработке рекомендаций для проектирования туннелей в горной местности, выбора форм и размеров туннелей, месторасположения туннеля относительно склона гор, каньонов и др.;
- создании методических пособий для решения инженерных задач аналитическим методом моделирования (метод Колосово-Мусхелишвили;
- экспертной оценке напряженно-деформированного состояния подземных горных выработок и туннелей, коммуникаций, рудников вокруг массивов горных пород, расположенных в горной местности.

Результаты диссертационной работы внедрены в учебном процессе в КРСУ им. Б.Н. Ельцина при подготовке:

– бакалавров по направлению 15.03.03 – РФ, 650500 – КР «Прикладная механика» в составе дисциплин «Математические методы двумерной теории упругости» и «Специальные главы и практикум по высшей математике»;
– бакалавров по направлению подготовки 08.03.01 – РФ и 750500 – КР «Строительство», профиль «Гидротехническое строительство» по дисциплине «Проведение горных выработок»;
– бакалавров по направлению подготовки 750500 - «Строительство» профиль «Гидротехническое строительство» по дисциплинам: «Механика грунтов», «Решение инженерных задач методом математического моделирования» на кафедре «Горного гидротехнического строительства» в КНАУ им. К.И. Скрябина.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

- унифицированная методика моделирования 15-ти типовых форм поперечных сечений туннелей и аналитическое описание напряженно-деформированного состояния вокруг туннелей путем вариации постоянных параметров отображающей функции;
- установленные новые закономерности напряженно-деформированного состояния массива горных пород вокруг туннелей, учитывающих начальное состояние горного массива, месторасположение и формы сечений туннеля с привлечением аналитической модели, представленной программой MATHCAD к расчету полей напряжений и деформаций;
- аналитическое описание напряженно-деформированного состояния горных пород вокруг туннелей в зависимости от совместного действия силы гравитации, горизонтальных тектонических сил, отсутствия напора и действия гидростатического напора воды;
- автоматизированный алгоритм расчета и графического его оформления напряженно-деформированного состояния массивов

вокруг гидротехнических туннелей с применением продукта программной среды MATHCAD.

Научные положения основываются на решении задачи теории упругости для напорных гидротехнических туннелей в условиях действия силы гравитации и гидростатического напора, что содействовало обоснованию методики расчета напряженно-деформированного состояния напорных гидротехнических туннелей, состоящей из следующих элементов:

1. Начальное напряженно-деформированное состояние массива до проведения гидротехнических туннелей или горной выработки.
2. Изменение напряженно-деформированного состояния массива вокруг гидротехнических туннелей после проведения горной выработки.
3. Напряженно-деформированное состояние массива вокруг гидротехнических туннелей под действием силы напора воды.

Личный вклад соискателя: заключается в постановке цели и задач исследования данной научно-технической задачи; в разработке алгоритма отображающего функции массива горных пород вокруг гидротехнических туннелей; в разработке новой автоматизированной системы исследования напряженно-деформированного состояния массивов горных пород вокруг туннелей в программной среде MATHCAD.

Апробация результатов иследования. Основные результаты исследования обсуждались, докладывались и опубликованы: в Кыргызском национальном аграрном университете им. К.И. Скрябина на научных конференциях и семинарах «Горное гидротехническое строительство». (Бишкек, 2004, 2009 гг.); в институте Геомеханики и освоения недр НАН КР на международной конференции «Современные проблемы механики и сплошных сред». (Бишкек, 2005, 2011, 2012, 2013 гг.); в Кыргызско-Российском Славянском университете им Б.Н. Ельцина на кафедре «Механики». (Бишкек, 2006, 2013 гг.); в научно-методическом журнале «Вестник науки и образования». (Москва, 2018 г.); в журнале «Естественные и технические науки». Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и

изданий, также в международную базу данных Chemical Abstracts. (Москва, 2018 г.); в теоретическом и научно-практическом журнале Вестник ЗабГУ. (Чита, 2018г.); в научном журнале «European Applied Sciences» (Национальный центр ISSN). (Вена, 2018 г.); в научном журнале «Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана», «Известия ВУЗов Кыргызстана». (Бишкек, 2018, 2021гг.).

Полнота отражения результатов исследования в публикациях. Основные результаты исследования опубликованы в 17 работах восьми печатных изданий, из которых 5 работ опубликовано за рубежом в рецензируемых журналах.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, приложений, изложенных на 132 страницах компьютерного текста, содержит 21 таблицу, 51 рисунок, список использованной литературы из 78 наименований.

В первой главе выполнен краткий и критический обзор работ по исследуемой проблеме, приведен используемый для исследования математический аппарат, определены цель и задачи исследований диссертации.

Во второй главе приводится алгоритм расчета и выполнен прогноз начального напряженного состояния глубокого каньона, одиночной горы, межгорной впадины и пологого речного каньона.

В третьей главе разработана аналитическая модель напряженного состояния вокруг туннелей и горных выработок в массивах с горным рельефом без учета действия напора воды.

В четвертой главе выявлено влияние напора воды на распределения напряжений для туннелей с типовыми поперечными сечениями. Изучены закономерности распределения напряжений вокруг туннелей при различных сочетаниях действия гравитационных, горизонтальных тектонических сил и напора воды.

ГЛАВА 1. МЕТОДИКА И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВОВ ВОКРУГ ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ ТУННЕЛЕЙ

1.1. Математические основы метода исследования

Упругое тело [68,74] разместим в плоскости XOY. Координаты в окрестности некоторой точки M твердого тела обозначаются через (x, y). Состояние упругого тела характеризуется двумя компонентами смещений $U(x, y) -$ горизонтальная компонента, $V(x, y) -$ вертикальная компонента смещений окрестности точки $M(x, y)$. В окрестности этой точки действует три компоненты напряжений $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$, $\tau_{xy}(x, y)$ и три компоненты относительных деформаций $\varepsilon_x(x, y)$, $\varepsilon_y(x, y)$, $\gamma_{xy}(x, y)$. Всего восемь величин u, v, σ_x, σ_y, τ_{xy}, ε_x, ε_y, γ_{xy} полностью характеризуют напряженно-деформированное состояние упругого тела в окрестности точки $M(x, y)$. Координаты этой точки являются центром выделенного дифференциального элемента тела $dx, dy * 1$ с сторонами dx, dy.

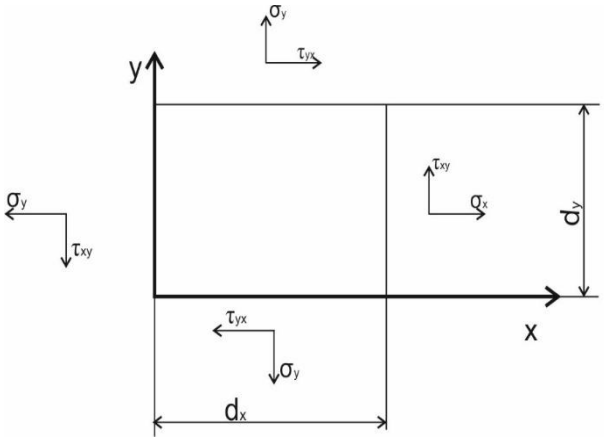


Рисунок 1.1 - Элемент тела

Выделенный элемент $dx \cdot dy \cdot 1.$ имеет горизонтальный ρ_x и вертикальный ρ_y составляющие обьемных сил. Компонента напряжений $\sigma_x -$ действует перпендикулярно оси OY и параллельно оси $OX,$ компонента $\sigma_y -$ действует перпендикулярно оси OX и параллельно оси OY. Поэтому их называют нормальными компонентами напряжений и снабжены субиндексами

x и y, τ – компонента, действует по касательной либо параллельно оси OX либо параллельно оси OY. Если задача упругости ставится и решается в криволинейных координатах $\xi o \eta$, то для напряжений приняты обозначения $\sigma_\varepsilon(\xi,\eta)$, $\sigma_\eta(\xi,\eta)$, $\tau_{\xi\eta}(\xi,\eta)$, а для перемещений u_ξ, v_η. Упругие характеристики $E -$ модуль упругости при растяжении и сжатии; $\nu -$коэффициент Пуассона [74].

Компоненты относительных деформаций ε_x, ε_y, γ_{xy} и компоненты перемещений (u, v) выражаются с помощью дифференциальных связей:

$$\varepsilon_x(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}; \quad \varepsilon_y(x,y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}. \tag{1.1}$$

В дальнейшем, аргументы ε_x, ε_y, γ_{xy} и (u, v) опустим во избежание громоздкости записей. Дифференцируем дважды в (1.1) величину ε_x, по dy дважды, вторую ε_y по dx дважды, третью γ_{xy} по dy и по dx, в результате имеем равенства:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial^2 y}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{\partial^2}{\partial^2 x}\left(\frac{dv}{dy}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{1.2}$$

Равенство (1.2) указывает, что u, υ в окрестности точки *M (x, y)* не могут быть произвольными функциями, а удовлетворяют условию:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \tag{1.3}$$

Это обьстоятельство физически характеризует, что упругое тело до и после деформированного состояния остается сплошным непрерывным телом. Уравнение (1.3) принято называть уравнением совместности деформаций

$$\{\varepsilon_x,\ \varepsilon_y, \gamma_{xy}\ \}$$

Компоненты деформаций ε_x, ε_y, γ_{xy} и компоненты напряжений $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$, $\tau_{xy}(x,y) \approx \sigma_x$, σ_y, τ_{xy} для изотропно линейно-упругих тел связаны с законом Гука [74]. В случае плоского напряженного состоянии $\sigma_z = 0$, закон Гука [74] имеет вид:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right);\ \ \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right);\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G};\ \ \tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}. \qquad (1.4)$$

Здесь: E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона.

В случае плоской деформации $\varepsilon_z = 0$ закон Гука (1.4) представляется в виде:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\sigma_x - \nu(1+\nu)\sigma_y\right], \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\sigma_y - \nu(1+\nu)\sigma_x\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}; \qquad (1.5)$$

Компоненты напряжений $\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy}$ в окрестности произвольной точки упругого тела удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия [68, 74].

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \rho_x = 0, \qquad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \rho_y = 0, \qquad (1.6)$$

где ρ_x, ρ_y - горизонтальные и вертикальные проекции обьемных сил выделенного элементарного обьема упругого тела.

Подвергаем первое уравнение в (1.6) операции по дифференцирования по dx, второе уравнение по dy и в случае отсутствия или постоянства обьемных сил ($\rho_x = \rho_y = 0$ или $\rho_x, \rho_y \approx const$) имеем:

$$2\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x\partial y} = -\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2} = 0 \qquad (1.7)$$

положив в (1.3) уравнение совместимости с помощью закона Гука (1.4) или (1.5), и, исключив касательную компоненту напряжений τ_{xy} в (1.7), будем иметь условие совместности деформаций в напряжениях:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 0 \qquad (1.8)$$

Система трех дифференциальных уравнений (1.6) и (1.3) допускает определению трех величин $\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy}$ в двумерной теории упругости, если они удовлетворяют так называемые граничные условия для напряжений.

Внутренние напряжения внутри тела $\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy}$ при приближении к границе тела уравновешиваются с напряжениями X_n и Y_n, действующие на наклонной площадке $AC \cdot 1$ (рис. 1.2).

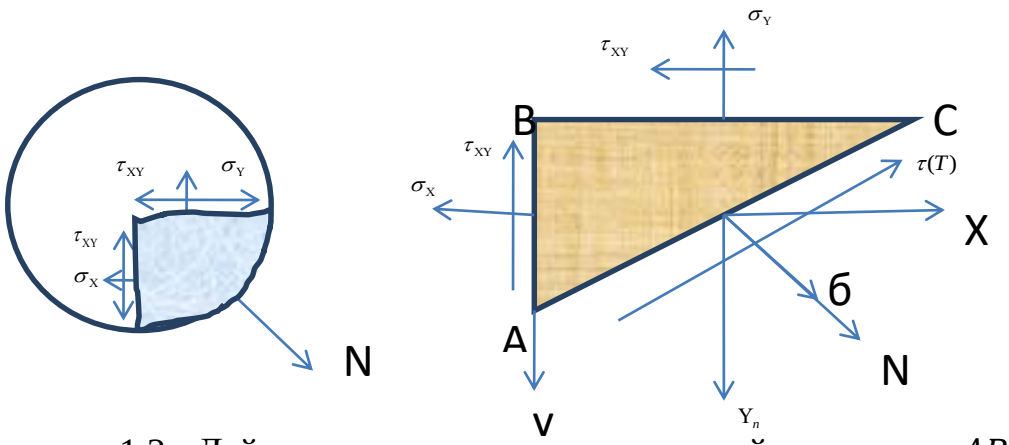


Рисунок 1.2 - Действие компонентов напряжений на элемент ABC

Площадь грани $BC \cdot 1$ и наклонная площадь $AC \cdot 1$ связаны соотношением:

$$\cos(n, x) = m = \frac{BC \cdot 1}{AC \cdot 1};$$

Площадь грани $BA \cdot 1$ с площадью $AC \cdot 1$ связано $\cos(n, x) = l = \frac{BC \cdot 1}{AC \cdot 1}$.

Следовательно, проекции всех сил на ось OX и OY действующие на элемент ABC с толщиной 1 должны быть равны нулю.

$$-(\sigma_x \cdot BA \cdot 1) - (\tau_{xy} \cdot BC \cdot 1) + (X_n \cdot AC \cdot 1) = 0$$

$$-(\sigma_y \cdot BC \cdot 1) - (\tau_{xy} \cdot AB \cdot 1) + (Y_n \cdot AC \cdot 1) = 0$$

разделим на $(AC \cdot 1)$ обе уравнения и будем иметь :

$$X_n = I\sigma_x + \tau_{xy}m; \qquad Y_n = I\tau_{xy} + \sigma_y m; \tag{1.9}$$

где, $I = \cos(n, x)$, $m = \cos(n, y)$ углы между нормали N и ox, oy в (1.8) называются граничными условиями для определения напряжений.

Если X_n и Y_n проектируем на нормаль N и направлению касательной τ (см. рисунок 1.2), то для наклонной площадки действует нормальная (σ) и (τ) компонента напряжений, где С площадка $BC \cdot 1$ имеет угол α, т.е. $I = \cos\alpha$, следовательно $m = \cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$. Выражения для (σ) и (τ) имеют вид:

$$\sigma = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + 2\tau_{xy} \sin\alpha \cdot \cos\alpha;$$

$$\tau = \left(\sigma_y - \sigma_x\right)\cos\alpha\sin\alpha + \tau_{xy}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) \qquad (1.10)$$

Граничные условия (1.9) или (1.10) равносильно используются при определении компонентов напряжений из системы трех дифференциальных уравнений. Вместо трех интегрально-дифференциальных уравнений для определения компонентов напряжений путем замены их функцией F отыскивается одна функция напряжений Эри F [74]. Ж.Б. Эри (1862) [74] вместо компонентов напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} ввел одну функцию *F(x,y)* такую, чтобы имело место связей:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}; \qquad (1.11)$$

тогда из (1.3) вытекает, что

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4}\right) = 0 \qquad (1.12)$$

Уравнение (1.12) названо бигармоническим и является основным дифференциальным уравнением двумерной теории упругости. Решение этого уравнения в механике упругих плоских твердых тел, в теории изгиба прямоугольных и круглых пластин, и в других изучено всесторонне.

Наиболее плодотворное для приложений в технике получило решение уравнения (1.12) с помощью функций комплексного переменного [66, 68].

$$z = x + iy, \ \bar{z} = x - iy,$$

где ,
$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}). \qquad (1.13)$$

Имеет место дифференциальных связей:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial z}{dy} = i, \quad \frac{\overline{dz}}{\partial y} = -i. \qquad (1.14)$$

Производим замену переменной в (1.12). Вместо x и y в функции напряжений $F(x, y)$ вводим новые компоненты переменных z и $\bar{z}$. Вычисляем производные:

$$\frac{\partial F(z,z)}{\partial x} = \frac{\partial F \partial z}{\partial z \partial x} + \frac{\partial F \partial \bar{z}}{\partial \bar{z} \partial x} = \frac{\partial F}{\partial z}\cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}\cdot 1 = \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}};$$

$$\frac{\partial F(z,\bar{z})}{\partial y}=\frac{\partial F dz}{\partial z\partial y}+\frac{\partial F\partial\bar{z}}{\partial\bar{z}\partial y}=\frac{\partial F}{\partial z}\cdot i+\frac{dF}{\overline{dz}}\cdot(-i)=i\left[\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial\bar{z}}\right];$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial\bar{z}}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial\bar{z}}\left(\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial\bar{z}}\right)\cdot\frac{\partial\bar{z}}{\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}+2\frac{\partial F}{\partial z\partial\bar{z}}+\frac{\partial^2 F}{\partial\bar{z}^2};$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=\frac{\partial F}{\partial z}\left[i\left(\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial\bar{z}}\right)\right]\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\left[i\left(\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial\bar{z}}\right)\right]\cdot\frac{\partial\bar{z}}{\partial y}=-\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial\bar{z}};$$

учитывая , что из последних двух уравнений следует, что

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial\bar{z}}; \tag{1.15}$$

тогда из (1.12) после замены по аналогии (1.15) следует, что

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)\left(4\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial\bar{z}}\right)=16\frac{\partial^2 F}{\partial z^2\partial\bar{z}^2}=0. \tag{1.16}$$

Отсюда имеем, что дифференциальный оператор для:

$$\frac{\partial^4 F(z,\ \bar{z})}{\partial z^2\partial\bar{z}^2}=0 \tag{1.17}$$

допускает простое линейное интегрирование по переменным z и $\bar{z}$. Как это показано в методе Колосова-Мусхелишвили [68] интеграл от (1.17) (еще раньше Гурс) имеет вид:

$$2\Phi(z)=\bar{z}\cdot\Phi(z)+z\overline{\Phi(z)}+\Psi(z)+\overline{\Psi(z)} \tag{1.18}$$

Колосовым показано, что связ компонентами напряжений и этой функцией

$$\sigma_x+\sigma_y=2\left[\Phi'(z)+\overline{\Phi'(z)}\ \right]=4Re\Phi'(z)$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2[\bar{z}\Phi'(z)+\Psi''(z)\ ] \tag{1.19}$$

где $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$– аналитические функции от комплексного переменного $z=x+iy,\ \ \bar{z}=x-iy$. Действительные части $u(x,y)$ и мнимые части $v(x,y)$ функции $\varphi(z)$удовлетворяют условиям Коши-Римана [68].

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}; \tag{1.20}$$

Таким же свойством должен обладать действительные и мнимые части другой функции $\Psi(z)$. Кроме того по определению имеют место обозначения:

$$\overline{\Phi(z)} = u_1(x,y) - iv_1(x,y), \qquad \overline{\Psi(z)} = u_2(x,y) - iv_2(x,y)$$

и подразумевается $\Phi(z)$ и $\overline{\Phi(z)}$ сопряженные аналитические функции , а $\overline{\Psi(z)}$ сопряженная функция с $\Psi(z)$.

Компоненты напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ переходят к компонентам напряжений $(\sigma_\xi, \sigma_\eta, \tau_{\xi\eta})$ в криволинейной декартовой системе координат, когда имеет место конформное преобразование $z = \omega(\zeta)$, где $\zeta = \xi + i\eta$ новая переменная вспомогательной полуплоскости $\eta \leq 0$, $\xi o \eta$. В этом случае имеет место связи между компонентами в декартовой и криволинейных координатах в виде [68, 74]:

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = \sigma_x + \sigma_y \tag{1.21}$$

$$\sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta} = e^{2i\alpha}\left(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}\right) \tag{1.22}$$

$$e^{2i\alpha} = \frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}} \tag{1.23}$$

компоненты напряжений $(\sigma_\xi, \sigma_\eta, \tau_{\xi\eta})$ определяются через функции $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ как это доказано Н.И. Мусхелишвили [68], из граничных условий вытекающие из соотношений :

$$\sigma_\eta + i\tau_{\xi\eta} = \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} + \frac{\overline{\omega(\zeta)}\Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta)\Psi(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}; \tag{1.24}$$

$$\sigma_\eta - i\tau_{\xi\eta} = \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} + \frac{\omega'(\zeta)\overline{\Phi'(\zeta)} + \overline{\omega'(\zeta)\Psi(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}}; \tag{1.25}$$

при $\zeta = \xi = t,\ \eta = 0$ и $\sigma_\eta(\xi, 0) = N(\xi),\ \tau_{\xi\eta}(\xi, 0) = T(\xi)$.

Здесь контурных точках упругих тел введены (1.25) вместо σ_η, $\tau_{\xi\eta}$ $\mathrm{T}(\xi)$ и $N(\xi)$ заданные на контуре обследуемой области нормальные и касательные внешние нагрузки. В этом случае заданные $N(\xi)$ внешние нормальные и $\mathrm{T}(\xi)$ касательные к контуру области внешние нагрузки при $\zeta = \xi = t,\ \eta = 0$.

Для определения напряжений $(\sigma_{\xi}, \sigma_{\eta}, \tau_{\xi\eta})$ необходимо интегрировать следующие граничные уравнения:

$$\Phi(t) \cdot \overline{\omega'(t)} + \overline{\Phi(t) \cdot \omega'(t)} + \overline{\omega'(t)}\Phi'(t) + \omega'(t)\Psi(t) = \overline{\omega'(t)}[N(t) + iT(t)] \quad (1.24a)$$

$$\Phi(t) \cdot \omega'(t) + \overline{\Phi(t)} \cdot \omega'(t) + \omega'(t)\overline{\Phi'(t)} + \overline{\omega'(t)\Psi(t)} = \omega'(t)[N(t) - iT(t)] \quad (1.25a)$$

Для ясности приводим соотношения и обозначения, принятые после замены новой переменной:

$$z = \mathrm{x}(\xi, \eta) + iy(\xi, \eta) = \omega(\zeta),\ a^{2i\alpha} = \frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}; \quad (1.26)$$

$$\varphi'(z) = \Phi(z),\ \Psi'(z) = \Psi(z),\ \varphi(\zeta) = \varphi_1[\omega(\zeta)],\ \Psi(\zeta) = \Psi_1[\omega(\zeta)],$$

$$\Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)},\ \Psi(\zeta) = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}. \quad (1.27)$$

Решение граничных задач (1.24) для различных областей, которые имеют место в научной литературе, особенно в задачах геомеханики, связанные с конформным отображением типа (1.23) и моделированием форм горного рельефа более объективно подлежат к анализу и обобщению с помощью использованных функций $\omega(\zeta)$.

1.2. Методические основы оценки напорного состояния вокруг гидротехнических туннелей

Для математического описания, напряженного состояния массивов пород вокруг туннелей в окрестности произвольной точки М (x, y) в декартовой системе координат XOY рассматривался дифференциальный элемент $(dx, dy;\ 1)$ или объем пород $(dx, dy;\ 1)$, где напряженное состояние задано величинами компонентов напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$. Контур отверстия прямолинейными элементами dx, dy описывается затруднительно, и поэтому на практике используется другие способы представления (подходы).

Первый подход, если контур отверстия является линиями окружности, использования так называемой полярной системы координат (r, θ). В этом случае вместо переменных x и y где, r - расстояние от начало координат до точки $M(x, y)$, θ – полярный угол, отсчитываемый от оси OX против часовой стрелки до направления лучи переменной r – который от начало координат проходит через M (x, y). При этом между переменных (x, y) и (r, θ) имеет место связей:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta; \quad x^2 + y^2 = r^2, \ \theta = \ arctg\frac{y}{x}\ ; \qquad (1.28)$$

Компонентов напряжений применительно новой системе координат (r, θ) принято обозначать:

σ_r – нормальное напряжение, направленное вдоль новой оси or;

σ_θ – нормальное напряжение, направленное перпендикулярное компоненты σ_r; $\tau_{\theta r}$ – касательное компоненты напряжений.

Первый подход моделирования напряженного состояния вокруг туннелей является преобразования бигармонического уравнения (1.2) для полярной оси координат. В этом случае имеет место дифференциальных связей между переменными (x, y) и (r, θ), что вытекает из (1.28) в виде:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\theta, \ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\theta\,, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{\partial\theta};$$

Тогда любая функция $f(x, y)$ в полярных координатах $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ имеет место оператора для замены:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}; \qquad (1.29)$$

Дважды применив дифференцирования по ∂x и дважды по ∂y находим что:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{y^2} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}\right)$$

Еще раз повторив такую операцию бигармоническую функцию в (1.12), представим в виде:

$$\left(\frac{\partial^2(\mathrm{F})}{\partial \mathrm{r}^2}+\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{r}}+\frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial \theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{r}^2}+\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}+\frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\mathrm{F}(\mathrm{r},\theta)=0 \qquad (1.30)$$

В частном случае, когда F не зависит от переменной θ вместо (1.30) имеет место соотношений:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)=\frac{\partial^4 F}{\partial r^4}+\frac{2}{r}\frac{\partial^3 F}{\partial r^3}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial F}{\partial r}=0 \quad (1.31)$$

Уравнение (1.31) является основным разрешающим уравнением для случая, когда напряженно-деформированное состояние вокруг туннелей является полярно-симметричным состоянием [44, 74].

Впервые Ляме с помощью (1.31) рассмотрел задачу для тела, контуру которых ограничены окружностями R_1 и R_2 $(R_1 > R_2)$ ее кольцевое сечение. На контурах действует внутреннее давление P_0 и нагрузку, давление P_1. Это задача решена еще в середине 19 века носит название задача Ляме. Применительно для туннелей это решение может быть использовано, если наружный радиус R_2 настолько большим, чтобы принимать бесконечным, т.е. круговое отверстие R_1 только под действием внутреннего напора P_0.

Общий подход интегрирования уравнения (1.31) заключается метод разделения переменных, когда функция напряжения представляется в виде:

$$F(x,\theta)= f_1(r)\cdot f_2(\theta) \qquad (1.32)$$

Тогда в зависимости от вида $f_2(\theta)$ для определения $f_1(r)$ вытекает обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка, которого удается интегрировать т.е. выписывать выражений для $f_1(r)$ в явной форме, содержащих четырех постоянных интегрирование.

Например, решения для случая (1.31) функция $f_1(r)$ имеет вид:

$$f_0(r)=C_1r^3+C_2\frac{1}{r}+C_3r+C_4r+C_4r\ln r \qquad (1.33)$$

Если $f_0(\theta)=\sin\theta$ т.е. решение (1.31) имеет вид:

$$F_1(r,\theta)=\left(C_1r^2+\frac{C_2}{r}+C_3r+C_4r\ln r\right)\sin\theta \qquad (1.34)$$

В случае $f_2(\theta) = \cos 2\theta$ решение имеет вид

$$F_2(r,\theta) = (C_1 r^3 + C_2 \frac{1}{r} + C_3 r + C_4 r + C_4 r \ln r) \cos 2\theta \qquad (1.35)$$

Общее решение уравнения (1.30) по изложенному алгоритму дано Мичтлл (T.H. Michtll [74]). Компоненты напряжений $\sigma_r, \sigma_{\theta,} \tau_{r\theta}$, когда имеется общее решение (1.30) в виде (1.32) – (1.35) вычисляется формулами:

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta}; \qquad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2};$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} = -\frac{\partial F}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) \qquad (1.36)$$

Представленная методика решения задач (1.30) – (1.36) теории упругости в полярных координатах является первый подход к расчету туннелей с круглым поперечным сечением, например, из задачи Ляме (1.35) можно получить решение задачи о состоянии туннели, кругового сечения испытывающий внутреннего напора. Из построенного решения (1.35) вытекает решение задачи Кирша. В этом случае туннель с круглым сечением испытывает одноосное растяжение (сжатие). Вообще эти два случаи решений в научной литературе [68,74] рассматривается неоднократно с разными методами.

Второй подход к оценке напряженного состояния является применение функций комплексного переменного [68, 74]. Для ясности обозначим OX', OY'- новые координатные оси, который образовано из первоначальной оси координат XOY путем поворота на угол α – отсчитаемый от направления оси OX до направления новой оси OX' против часовой стрелки.

Координаты точки $M(x,y)$ для новой оси $OX'Y'$ определяется величинами отрезков:

$$x' = \overline{0 \cdot 1} + \overline{1 \cdot 2}; \qquad y' = \overline{0 \cdot 3} + \overline{3 \cdot 4};$$

где,

$$\overline{0 \cdot 1} = x \cdot \cos\alpha, \quad \overline{1 \cdot 2} = \mathrm{Y} \cdot \sin\alpha, \quad \overline{0 \cdot 3} = \mathrm{Y} \cdot \cos\alpha, \quad \overline{3 \cdot 4} = \overline{3'4'} = x \cdot \sin\alpha$$

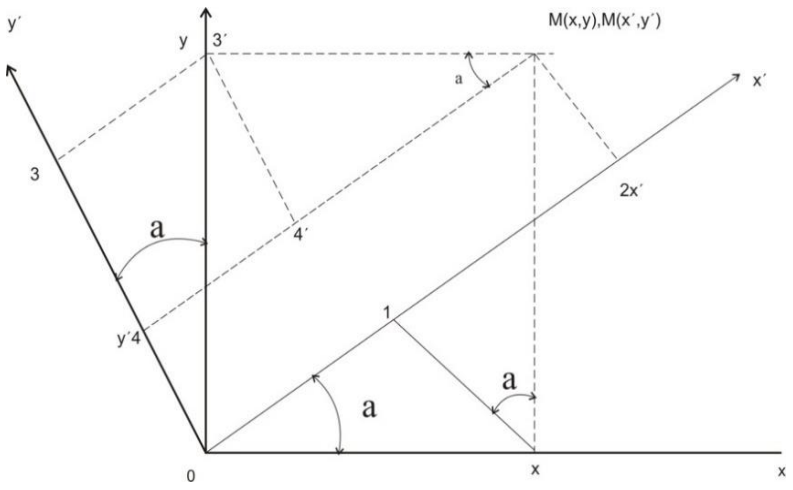


Рисунок 1.3 - Поворот осей координат

Другими словами, новые координаты X', Y' вычисляется

$$x' = = x \cdot cos\,\alpha + Y \cdot sin\,\alpha, \quad y' = -x \cdot sin\,\alpha + Y \cdot cos\,\alpha \tag{1.37}$$

Если заданы x' и y' координаты x и y удовлетворяет систему (1.37) т.е.

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = x'$$

$$-\sin\alpha + y\cos\alpha = y'$$

Отсюда по методу Крамера вычисляется определитель этой системы $\triangle$.

$$\triangle_0 = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Который отличен от нуля. Тогда,

$$x = \frac{1}{\Delta_0}\begin{vmatrix} y' & \sin\alpha \\ y' & \cos\alpha \end{vmatrix} = x'^{\cos\alpha - y'^{\sin\alpha}}$$

$$\mathrm{y} = \frac{1}{\Delta_0}\begin{vmatrix} \cos\alpha & x' \\ -\sin\alpha & y' \end{vmatrix} = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \tag{1.38}$$

Согласно доказанной теоремы тензорного исчисления [68], где модуль любого вектора $+[\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]$ сохраняет свою величину при повороте т.е. имеет место равенства:

$$\sigma_x \cdot x^2 + \sigma_y y^2 + 2\tau_{xy} x \cdot y = \sigma'_{xx} x'^2 + \sigma'_y y'^2 + 2\tau_{xy} x' \cdot y' \qquad (1.39)$$

Координаты x и y найденные (1.38) положим в (1.39) и приравниваем коэффициентов $\sigma'_x, \sigma'_y, \tau'_{x'y'}$ правых и левых частей. Заметим предварительно, что

$$x^2 = x'^2 \cos^2\alpha + y'^2 \sin^2\alpha - 2x'y' \cos\alpha \sin\alpha$$

$$y^2 = x'^2 \sin^2\alpha + y'^2 \cos^2\alpha - 2x'y' \cos\alpha \sin\alpha$$

$$x \cdot y = x'^2 \cos\alpha \sin\alpha - y'^2 \cos\alpha \sin\alpha + x'y'(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$$

Отсюда т.е. из (1.39) следует, коэффициенты при x'^2, y'^2 и $x'y'$ имеет место, когда

$$\sigma'_x = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha - 2\tau_{xy} \cos\alpha \sin\alpha;$$

$$\sigma'_y = \sigma_x \sin^2\alpha + \sigma_y \cos^2\alpha - 2\tau_{xy} \cos\alpha \sin\alpha;$$

$$\tau'_{xy} = \left(-\sigma_x + \sigma_y\right) \cos\alpha \sin\alpha + \tau_{xy}(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha).$$

Учитывая, что

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha); \;\; \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha);$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \cos 2\alpha; \quad 2\cos\alpha * \sin\alpha = \sin 2\alpha.$$

будем иметь:

$$\sigma'_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha;$$

$$\sigma'_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha;$$

$$\tau'_{xy} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha.$$

Сумма первых двух зависимостей равен;

$$\sigma'_x + \sigma'_y = \sigma_x + \sigma_y$$

Вычитая из второго уравнения и умножая на $2i$ третьей уравнение имеем

$$\sigma'_x - \sigma'_y = \left(\sigma_y + \sigma_x\right) \cos 2\alpha - 2\tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$2i\tau'_{x'y'} = (\sigma_y - \sigma_x) \cdot i \sin 2\alpha + 2\tau_{xy} i \cos 2\alpha \qquad (1.40)$$

Сумма полученных двух уравнений равен,

$$\sigma'_{y'} - \sigma'_x + 2i\tau'_{xy} = \left(\sigma_y - \sigma_x\right)(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) + 2i\tau_{xy}\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha;$$

Используя формулы Эйлера;

$$\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha = e^{2i\alpha}$$

Окончательно с учетом последнего записываем, что

$$\sigma'_x + \sigma'_y = \sigma_x + \sigma_y$$

$$\sigma'_y - \sigma'_x + 2i\tau'_{xy} = \left(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}\right)e^{2i\alpha} \qquad (1.41)$$

Первая формула в (1.41) в теории упругости [68, 74] доказана как первый инвариант напряжений, вторая получено Колосовым.

Применительно для полярной системы координат в (1.28) соотношение (1.41) перепишем принятыми выше обозначениями, а именно:

$$\sigma'_{x'} = \sigma_r,\ \sigma'_{y'} = \sigma'_\theta,\ \tau'_{x'y'} = \tau_{r\theta}$$

Тогда имеет место:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \sigma_x + \sigma_y$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = \left(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}\right)e^{2i\theta} \qquad (1.42)$$

Из первой уравнении вычитаем вторую и будем иметь:

$$2(\sigma_r - 2i\tau_{r\theta}) = 2\cdot\left(\sigma_x + \sigma_y\right) - 2\cdot\left(\sigma_y - \sigma_y + 2i\tau_{xy}\right)^{\ 2i\theta} \qquad (1.43)$$

Для правых частей (1.34) и (1.35) заменим комплексными потенциалами Колосова-Мусхелишвили [68], которые определены формулами (1.19).

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2\left[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}\right],$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]e^{2i\alpha},$$

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]e^{2i\alpha}. \qquad (1.44)$$

Соотношение для функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ для бесконечной плоскости с отверстием представляются в виде рядов [44, 68].

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\propto} a_k\, z^{-k}, \quad \Psi(z) = \sum_{k=0}^{\propto} a'_k z^{-k} \tag{1.45}$$

Третья формула (1.44) для контурных точек круглого отверстия может быть представлено в виде:

$$\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - \; e^{2i\alpha}[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] = N - iT \tag{1.46}$$

где, N и T суть напряжений σ и τ соответственнов (1.10), которые рассматриваются как нормальные N и касательные T составляющие внешних сил. Если N и Т разложим в ряд Фурье по степеням z^k, то

$$N + iT = \sum_{k-8}^{\propto} A_k z_k$$

положив в (1.38)

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

будем иметь и правой части и в левой части некоторых степенных рядов. Приравнивая коэффициентов при одинаковых степенях $e^{ik\theta}$и $e^{-ik\theta}$ правых и левых частей (1.38), будем иметь системы алгебраических уравнений для определения коэффициентов a_k и a'_k в (1.45). Такой подход справедлив только для областей, контуры которых являются круговым или концентрическими круговыми (кольца).

В монографиях [68, 71] получены решения граничных задач. В частности, задача Кирша [71] круговое отверстие в одноосном растяжении S_x. В этом случае вид функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ имеет вид:

$$\Phi(z) = \frac{S_x}{4}\left(1 - \frac{2R^2}{z^2}\right), \quad \Psi(z) = -\frac{S_x}{2}\left(1 - \frac{R^2}{z^2} + \frac{3R^4}{z^4}\right) \tag{1.47}$$

Эти задачи решены другим методом Г.В. Колосовым [68] как и нами описанном Мусхелишвили с помощью аппарата отображения [68].

Двухосные растяжения, сжатия кругового отверстия рассмотрено Г.Н. Савина [71]. В монографиях С.Г. Авершина, С.А. Балалаева, В.Н. Груздьева, Ж.С. [3] Ержанова. Ш.М. Айталиева, Ж.К. Масанова [43] и многих других

получены решения задач о состоянии горных выработок, когда туннели находиться в двухосном напряженном состоянии по Диннику [40] вертикальное (γH) и горизонтальное сжатие ($\lambda\gamma$H).

Здесь: H – глубина расположения туннеля;

$\gamma -$ обьемный вес горных пород;

$\lambda = \frac{\nu}{1-\nu}$ –коэффициент бокового распора; $\nu -$ коэффициент Пуассона.

Поверхности земли, т.е. отсутствует горный рельеф. Задача определение комплексных потенциалов в полярных координатах с помощью подстановки $z = re^{i\theta}$в граничное условие (1.46) является вторым подходом к оценке напряженного состояния туннелей, если поперечное сечение туннеля имеет форму окружность.

Наиболее эффективный третий подход к оценке напряженного состояния туннелей является применение аппарата конформного отображения внешности туннеля на внешность единичного круга $z = \omega(\zeta), \zeta = \rho e^{i\theta},\ \rho \geq 1$ и использования свойств интегралов типа Коши для решения граничных задач (1.46). Такой подход пригоден не только туннелей с круглым поперечным сечением, но и других типовых форм сечений [37, 42, 43, 77] туннелей, используемых на практике.

1.3. Краткий обзор работ, сведение с оценкой состояний массивов вокруг туннелей

Основной подход моделирования, напряженного состояния массивов вокруг гидротехнических туннелей базируется наличие с отображающей функцией типа

$$z_1 = \omega(\zeta),\ \zeta = \rho e^{i\theta},\ \rho \geq 1,\ \theta \leq \theta \leq 2\pi \tag{1.48}$$

В этом случае переменные x и y превращаются функциями от двух новых аргументов;

$$x(\rho, \theta) = Re[\omega(\zeta)],\ y(\rho, \theta) = Im[\omega(\zeta)] \tag{1.49}$$

где, Re – обозначает действительную часть функции $\omega(\zeta)$, а Im- мнимую часть $\omega(\zeta)$.

Линии $\rho - const$ и $\theta - const$ образует криволинейную ортогональные системы координат.

$$\Phi(z) = \Phi[\omega(\zeta)] = \Phi(\zeta),\ \Psi(z) = \Psi[\omega(\zeta)] = \Psi(\zeta) \tag{1.50}$$

$\Phi'(\zeta) -$ производная от функции $\Phi(\zeta)$.

Вместо компонентов напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ вводим новых обозначений для компонентов напряжений $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \tau_{\rho\theta}$, которые согласно формулам преобразования (1.40) или (1.41) представляются соотношениями:

$$\sigma_\rho + \sigma_\theta = \sigma_x + \sigma_y$$

$$\sigma_\theta - \sigma_\rho + 2i\tau_{\rho\theta} = \left(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}\right)e^{2i\alpha} \tag{1.51}$$

Направление касательной α в произвольной точке в криволинейных координатах (1.48) и осью OX вычисляется просто, если только используется явное задание соотношение для $\omega(\zeta)$. Для вычисления направления α или одной той же для величины $e^{2i\alpha}$ в (1.51) поступает следующим образом. В точке z придаем смещение (малые) dz в направлении касательной кривой $\rho - const$. Тогда соответствующая переменная ζ_1получит смещение $\mathrm{d}\zeta_1$ в радиальном направлении $(d\rho)$.

Поэтому имеет место

$$dz = e^{i\alpha} \cdot |dz|,\ \ d\zeta = e^{i\theta}|d\zeta|,\ \ \frac{d\zeta}{|d\zeta|} = e^{i\theta},\ \zeta = \rho e^{i\theta},\ \ e^{i\theta} = \frac{\rho}{\zeta};$$

от первого следует

$$e^{i\alpha} = \frac{dz}{|dz|} = \frac{\omega'(\zeta)d\zeta}{|\omega'(\zeta)||d(\zeta)|} = \frac{\omega'(\zeta)e^{i\theta}}{|\omega'(\zeta)|} = \frac{\rho}{\zeta}\frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|};$$

т. е. $\quad e^{-i\alpha} = \dfrac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|} \cdot \dfrac{\rho}{\zeta}; \qquad e^{i\alpha} = \dfrac{\overline{\omega'(\zeta)}}{|\omega'(\zeta)|} \cdot \dfrac{\rho}{\zeta};$

Следовательно, возводив в квадрат обе часть для $e^{2i\alpha}$ и $e^{-2i\alpha}$ имеем

$$e^{2i\alpha} = \frac{\zeta^2}{\rho^2} \cdot \frac{\omega'(\zeta)^2}{\omega'(\zeta) \cdot \overline{\omega'(\varsigma)}} = \frac{\zeta^2}{\rho^2} \frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega(\zeta)}};$$

$$e^{-2i\alpha} = \frac{\overline{\zeta^2}}{\rho^2} \frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{\omega'(\zeta)};$$

Заменив в правой части (1.51) вместо компонентов напряжений функциями Колосова, имеем:

$$\sigma_\rho + \sigma_\theta = 2\left[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}\right];$$

$$\sigma_\theta - \sigma_\rho + 2i\tau_{\rho\theta} = 2\left[\overline{\omega(\zeta)}\Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta)\Psi(\zeta)\right] \cdot \frac{\zeta^2}{\rho^2} \frac{\omega'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}; \quad (1.52)$$

Вычитывая из первого уравнения второй (1.52), имеем

$$\sigma_\rho + i\tau_{\rho\tau} = \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} - \frac{\zeta^2}{\zeta^2\overline{\omega'(\zeta)}}\left\{\overline{\omega(\zeta)}\Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta)\Psi(\zeta)\right\};$$

$$\sigma_\rho - i\tau_{\rho\tau} = \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} - \frac{\zeta^2}{\zeta^2\overline{\omega'(\zeta)}}\left\{\omega(\zeta)\overline{\Phi'(\zeta)} + \overline{\omega'(\zeta)}\,\overline{\Psi(\zeta)}\right\}; \quad (1.53)$$

При заданных нормальных N_n и касательных T к контуру внешних нагрузках из (1.53) определяется функции $\Psi(\zeta)$, используя соотоношений (1.51) вычисляется компоненты $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \tau_{\rho\theta}$.

ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 1

Наличие отображающей функции типа (1.48) в работах [3, 40, 44, 66, 69, 71, 74] допускает исследование напряженного состояния массивов горных выработок наибольшей эффективности. В работах [3, 40, 43, 44] исследованы горные выработки, расположенные в массиве ровной дневной поверхности. Например, в работах [37, 40-43, 77] горные выработки исследованы без учета влияния горного рельефа и гидростатического напора.

В работах Б. Жумабаева и Г.Б. Ходосевича [47, 53, 54] и А.А. Аманалиева [12] горные выработки изучены с учетом горного рельефа и слоистости массива, без учета гидростатического напора.

В работах Б. Жумабаева и Г.С. Исаевой [48, 49, 56] исследовано напряженное состояние массивов речных каньонов с учетом влияния водохранилищ и без влияния туннелей.

В работах Б. Жумабаева и К.К. Абдыгазиева исследована устойчивость грунтовой плотины с асфальтобетонным покрытием [1, 48, 49] без выработок. А в работах Б. Жумабаева и Э.В. Ким [62, 76] изучены откосы дорог на склоне гор. В работах [51, 57-59, 78] Б. Жумабаева и К.Дж. Исмаиловой исследовано напряжено-деформированное состояние массивов нагорных плотин.

В работах Б. Жумабаева и Ж.А. Баялиевой [14-16, 17-19,] исследовано состояния горных склонов, когда на склоне горы имеются горизонтальные участки - уступы.

Во всех работах [20-36] для учета влияния гористого рельефа на начальное напряженное состояния гидротехнического туннеля используется отображающая функция типа (1.25) для полу бесконечных областей на полуплоскость в плоскость вспомогательного переменного $\zeta = \xi + i\eta(-\infty \leq \xi \leq \infty, \eta \leq 0)$. Для решения задач для отверстий отображение реализуется для внешности единичного круга в вспомогательной плоскости переменного

$$\zeta_0 = \rho e^{i\theta}, (1 \leq \rho \leq \infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

Поэтому для оценки напряженного состояния массивов вокруг гидротехнических полей напряжений возникает потребность оперировать и связать суммирование полей напряжений построенных в декартовой системе координат XOY, криволенейной декартовой системе координат $\xi o \eta$ и криволинейной системе координат $\rho\theta$. Вопросы перехода с одной системы координат в другую систему координат, например, от системы $\xi o \eta$ на XOY или от $\rho\theta$ на XOY или $\xi o \eta$ до сих пор не разработаны, для решения этой проблемы необходимо построение обратных отображений типов (1.25) или (1.48).

Методические разработки работ [3, 37, 40, 43, 44, 77] пригодны для применения для оценки состояния гидротехнических туннелей, если туннель расположен в массиве с ровной дневной поверхностью.

В работах [12, 47, 49] горные выработки моделированы только в зоне влияния речного каньона и для частной формы массива горы. Поскольку созданы расчетные модели массивов с горным рельефом без учета туннелей [1, 38, 40, 45, 46, 48, 49, 51, 62], то результаты этих работ для моделирования состояний гидротехнических туннелей в дальнейшем создаст реальные возможности для учета влияния водохранилищ, дорог на склонах гор, плотин и карьеров.

Целью дальнейших исследований является разработка методических и математических основ расчета и оценки напряженно-деформированного состояния массивов гидротехнических туннелей с учетом местоположения и формы туннеля, влияния гористого рельефа и совместного действия гравитационных, сейсмических сил, а также гидростатического напора воды.

Для достижения намеченной цели необходимо последовательно **решать следующие задачи**:

1. Оценка и расчет начального напряженного состояния массивов с горным рельефом, которое имеет место до образования туннелей.

2. Математическое описание измененного поля напряжений массивов вокруг туннелей, обусловленного образовнием гидротехнического туннеля.
3. Методика определения напряжений вокруг туннеля в массиве при суммировании трех полей напряжений.
4. Оценка влияния напора воды на напряженное состояния массива вокруг гидротехнического туннеля.
5. Анализ и прогноз закономерностей распределения напряжений, деформаций массива вокруг туннелей для состояний, которые возникают от сочетаний действия гравитационных, горизонтальных тектонических сил и величины напора, форм сечений туннеля и типа горного рельефа.
6. Расчет напряжений и деформаций массива вокруг туннелей и оформление результатов исследований в программной среде MATHCAD.

ГЛАВА 2. ОЦЕНКА НАЧАЛЬНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ГОРНОГО МАССИВА

2.1. Общая методика моделирования, напряженного состояния массивов вокруг туннеля

Для оценки напряженного состояния массива вокруг напорных туннелей в горной местности, прежде всего, необходимо знать начальное напряженное состояние горного массива [46] в центре воображаемого туннеля. Это начальное напряженное состояние может быть измерено методом «разгрузки» инструментально [4-8, 10, 11, 44, 54, 60, 64, 65, 74] при наличии условий для выполнения измерений. Альтернативный путь оценки начального напряженного состояния массива является математическое моделирование с учетом формы рельефа массива [2, 9, 13, 45, 75, 77] при действии сил гравитации, сейсмики [39, 42, 43, 45, 46, 72] и тектонической активности [4, 6, 7, 67]. Когда известно начальное напряженное состояние массива в центре воображаемого туннеля, то необходимо установить влияние образования туннеля на распределение напряжений вокруг туннелей [8, 40, 43, 53] и влияния гидростатического напора на перераспределения напряжений вокруг туннеля, как в работе [50-57].

Ниже (в главе 2) в рамках метода Колосова-Мусхелишвили [68] и программного комплекса MATHCAD [63] изучено начальное напряженно-деформированное состояние массивов одиночной горы, каньона, ограниченного параболическим цилиндром, речного каньона и межгорной впадины (глава 2). После оценки начального состояния горного массива следует определить влияние образования туннеля той или иной формы на начальное напряженное состояние массива (см. глава 3).

Далее после определения распределения напряжений вокруг туннеля необходимо установить влияние давления напора воды, распределенной по закону Паскаля (см. глава 4).

Поставленнные задачи и цели для достижеия настоящей работы сводятся к последовательно опредеяемой сумме полей напряжений:

$$\sigma_x^0 = \sigma_x^n + \sigma_x^{\text{р}} + \sigma_x^m + \sigma_x^{\text{н}},$$

$$\sigma_y^0 = \sigma_y^n + \sigma_y^{\text{р}} + \sigma_y^m + \sigma_y^{\text{н}},$$

$$\tau_{xy}^0 = \tau_{xy}^n + \tau_{xy}^p + \tau_{xy}^m + \tau_{xy}^н \qquad (2.1.)$$

Напряжения с верхним индексом «*n*» - поле напряжений для полуплоскости у $\leq$ 0, которое возникает при совместном действии гравитационных сил γ и сейсмических сил $\gamma_{\text{с}} = \text{к}_{\text{с}}\gamma$ и тектонического T_x сжатия. Сила гравитации γ направлена вертикально вниз, т.е. в глубь к центру массива земной коры, сейсмическая сила направлена из глубины массива к поверхности земли и составляет острый угол (δ) с вертикальной осью. Суммы полей напряжений являются интегралами неоднородных дифференциальных уравнений равновесия для полуплоскости у $\leq$ 0:

$$\frac{\partial\sigma_x^n}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}^n}{\partial y} + \rho_x = 0, \quad \frac{\partial\tau_{xy}^n}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y^n}{\partial y} + \rho_y = 0, \qquad (2.2)$$

где $\rho_x = \gamma k_c \sin\delta$ – горизонтальные и вертикальные;

$\rho_y = \gamma(1 - k_c \cos\delta)$ составляющие объемной силы;

g – гравитационное ускорение; λ – коэффициент бокового распора;

k_c – коэффициент сейсмичности горного региона;

T_x – тектоническая сила, которое направлено горизонтально.

Интегралы от (2.2) имеют вид:

$$\sigma_x^n = A_1 \cdot y + T_x; \quad \sigma_y^n = A_2 y; \; \tau_{xy}^n = A_3 y, \qquad (2.3)$$

где $A_1 = \lambda \cdot \gamma \cdot (1 - k_c \cdot \cos\delta; A_2 = \gamma \cdot (1 - k_c \cdot \cos\delta; A_3 = k_c \cdot \gamma \cdot \sin\delta.$

Напряжения σ_x^p, σ_y^p, τ_{xy}^p - поля напряжений, которые характеризуют влияния рельефа межгорной впадины [32, 45] и являются задачей этой второй главы. Для определения этого второго поля напряжений в (2.1) сначала построим модель начального напряженного состояния массива с горным рельефом в виде:

$$\sigma_x^{\text{н}} = \sigma_x^n + \sigma_x^{\text{р}}, \qquad \sigma_y^{\text{н}} = \sigma_y^n + \sigma_y^{\text{р}}, \qquad \tau_{xy}^{н} = \tau_{xy}^n + \tau_{xy}^p\,. \qquad (2.4)$$

Поле напряжений (2.4) на дневной поверхности массива с горным рельефом удовлетворяют граничным условиям;

$$(\sigma_x^p + \sigma_x^n + T_x) \cdot (\cos n, x) + (\tau_{xy}^p + \tau_{xy}^n)) \cdot (\cos n, y) = 0$$

$$(\tau_{xy}^p + \tau_{xy}^n) \cdot (\cos n, x) + (\sigma_y^n + \sigma_y^p) \cdot \cos(n, y) = 0 \qquad (2.5)$$

где n - направление внешней нормали в какой-либо точке контура.

2.2. Начальное напряженное состояние массива одиночной горы

Начальное напряженное состояние массива горы определяется двумя путями. Первый путь — это измерение методом «разгрузки» величины начального напряженного состояния массивов в натурных условиях. Этот путь экономически весьма дорог, так как необходимо обеспечить доступ к точке измерения массива, например, проведением горной выработки. Второй путь - это метод математического моделирования, например, метод Колосова – Мусхелишвили с привлечением конформного отображения. Использование программного комплекса MATCHAD упрощает выполнение расчетов полей напряжений и деформаций массивов с графическим представлением с помощью ЭВМ.

Рельеф горы в разрезе представляет собой полуплоскость с одним криволинейным выступом, где его левый склон примыкает почти перпендикулярно к основанию. Для определения напряжений в (2.2) воспользуемся аппаратом конформного отображения с помощью функции:

$$z = \omega(\zeta);\;\; z = x + i \cdot y;\; \zeta = \xi + i \cdot \eta;\; i = \sqrt{-1};$$

$$\omega(\zeta) = a \cdot \zeta + \omega_0(\zeta); \omega_0(\zeta) = a_1/(\zeta - i); \qquad (2.6)$$

Присвоив численные значения параметров: $a=100м;\; a_1=600 + 150i$ м.

с помощью функции (2.6) построим модель формы горы, которая представлена на рис. 2.1.

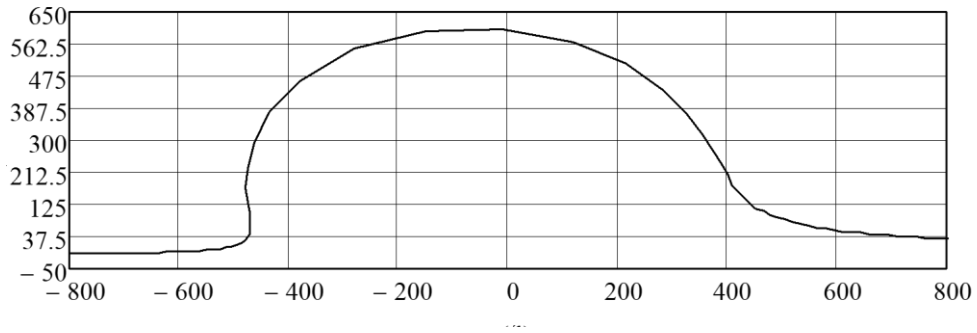


Рисунок 2.1 - Форма горы с вертикальным склоном (м).

Из граничных условий в (2.5) определены функции [51]:

$$\Phi(\zeta)\cdot\omega'(\zeta)+G(\zeta)=B(\zeta)\qquad G(\zeta)=-a_1\overline{\Phi_1(\iota)}/[\zeta-i]$$

$$\Psi(\zeta)\cdot\omega'(\zeta)+\Phi(\varsigma)\cdot\overline{\omega}(\zeta)+\Phi'(\zeta)\cdot\overline{\omega'}(\zeta)-\overline{G}(\zeta)=A(\zeta)\qquad(2.7)$$

через которые выражается второе поле напряжений в (2.4) с помощью формул [68]:

$$\sigma_\xi+\sigma_\eta=2\left(\Phi(\zeta)+\overline{\Phi(\zeta)}\right);$$

$$\sigma_\eta-\sigma_\xi+2i\tau_{\xi\eta}=2(\overline{\omega(\zeta)}\Phi(\zeta)'+\omega(\zeta)'\Psi(\zeta))/\overline{\omega(\zeta)'}\qquad(2.8)$$

В (2.8) обозначены:

$$A(\xi,\eta)=\omega_0(\xi,\eta)[T_5+T_6\omega_0'(\xi,\eta)]+T_3C(\xi,\eta)+At(\xi,\eta)-T_6\,S(\xi,\eta);$$

$$B(\xi,\eta)=T_3\omega_0(\xi,\eta)\omega_0'(\xi,\eta)+T_2\omega_0(\xi,\eta)+T_4C(\xi,\eta)+Bt(\xi,\eta)-T_3\,S(\xi,\eta);\qquad(2.9)$$

$$At(\xi,\eta)=T_1\omega_0'(\xi,\eta);\quad Bt(\xi,\eta)=-T_1\omega_0'(\xi,\eta);$$

$$C(\xi,\eta)=C_1/\,(\zeta-i)+C_2/\,(\zeta+t_b-i)^2$$

$$S(\xi,\eta)=\frac{S_1}{\zeta(\xi,\eta)-i}+\frac{S_2}{[\zeta(\xi,\eta)-i]^2}+\frac{S_3}{\zeta(\xi,\eta)+t_b-i}+S_4/[\zeta(\xi,\eta)+t_b-i]^2;$$

$$T_1=\frac{T_x}{2};\qquad T_2=a(\frac{A_3+iA_2)}{2};\ \ T_3=i(A_1+A_2)\,/4;$$

$$T_4=-i(A_1-A_2+2\,iA_3)\,/4;$$

$$T_5=a(-A_3+iA_2)\,/2;\quad T_6=-i(A_1-A_2-2\,iA_3)\,/4;$$

$$\Omega_0=\omega_0(-i)\,;\Omega_1=\omega_0'(-i)\,;C_1=a_1\overline{\Omega_1};S_1=-a_1\overline{\Omega_1};S_2=-\,a_1\overline{\Omega_0};$$

Присвоив значения параметров, $\lambda = 0{,}5$; $T_x = -20 МПа$; $K_c = 0$ проводим расчет, выполненные результаты расчета напряжений начального состояния горы представлены в табл. 2.1 для контурных точек горы и на рис. 2.2 в виде изолиний для зоны сопряжения склона с его основанием.

Таблица 2.1 - Значения напряжений на контуре склона горы

0	t	x (м)	y (м)	σ_1 (МПа)	σ_2 (МПа)	N (МПа)	T (МПа)	T_{max} (МПа)
1	-5	-621.2	-5.8	0	-33.7	$2.1 \cdot 10^{-15}$	$2.4 \cdot 10^{-15}$	-33.4
2	-4	-550	0	0	-46.3	0	0	-43
3	-3	-495	15	0	-81.5	$7.1 \cdot 10^{-15}$	$3.6 \cdot 10^{-15}$	-22.5
4	-1	-470	60	$3.6 \cdot 10^{-15}$	-32.7	$6.4 \cdot 10^{-15}$	$1.3 \cdot 10^{-14}$	-32.4
5	0	-475	225	0	-2.3	0	0	-2.2
6	1	-150	600	$2.2 \cdot 10^{-15}$	-0.5	$2.2 \cdot 10^{-15}$	0	-0.4
7	2	325	375	$4.6 \cdot 10^{-15}$	-1.9	$4.4 \cdot 10^{-15}$	$2.1 \cdot 10^{-15}$	-0.5
8	3	410	180	$4.4 \cdot 10^{-15}$	-13.8	$4.4 \cdot 10^{-15}$	$4.4 \cdot 10^{-15}$	-5.9
9	4	495	105	0	-34.9	0	$3.1 \cdot 10^{-15}$	-1.9
10	5	532.4	70.6	0	-35	0	0	-22.3

Концентрация всех компонентов напряжений имеет место в зоне сопряжения вертикального склона горы с его основанием. Максимальное значение горизонтального нормального напряжения равно -82 МПа; вертикального равно -32 МПа; касательного равно -17 МПа. При удалении от зоны концентрации напряжений на расстоянии более 50 м горизонтальная компонента не более -40 МПа; вертикальная не более -21 МПа;

Рассмотрим зоны концентрации напряжений, где начальное напряженное состояние массива горы изменяется незначительно. Обозначим через S_x, S_y, S_{xy} вычисленные значения компонентов начального напряженного состояния массива в центре воображаемого туннеля.

На основании представленной на рис. 2.2 поле напряжений для интерпретации дальнейших модельных представлений об образовании туннеля принимаем соответственно: S_x *= -40 МПа;* S_y *= - 20 МПа;* S_{xy} *= -10 МПа.*

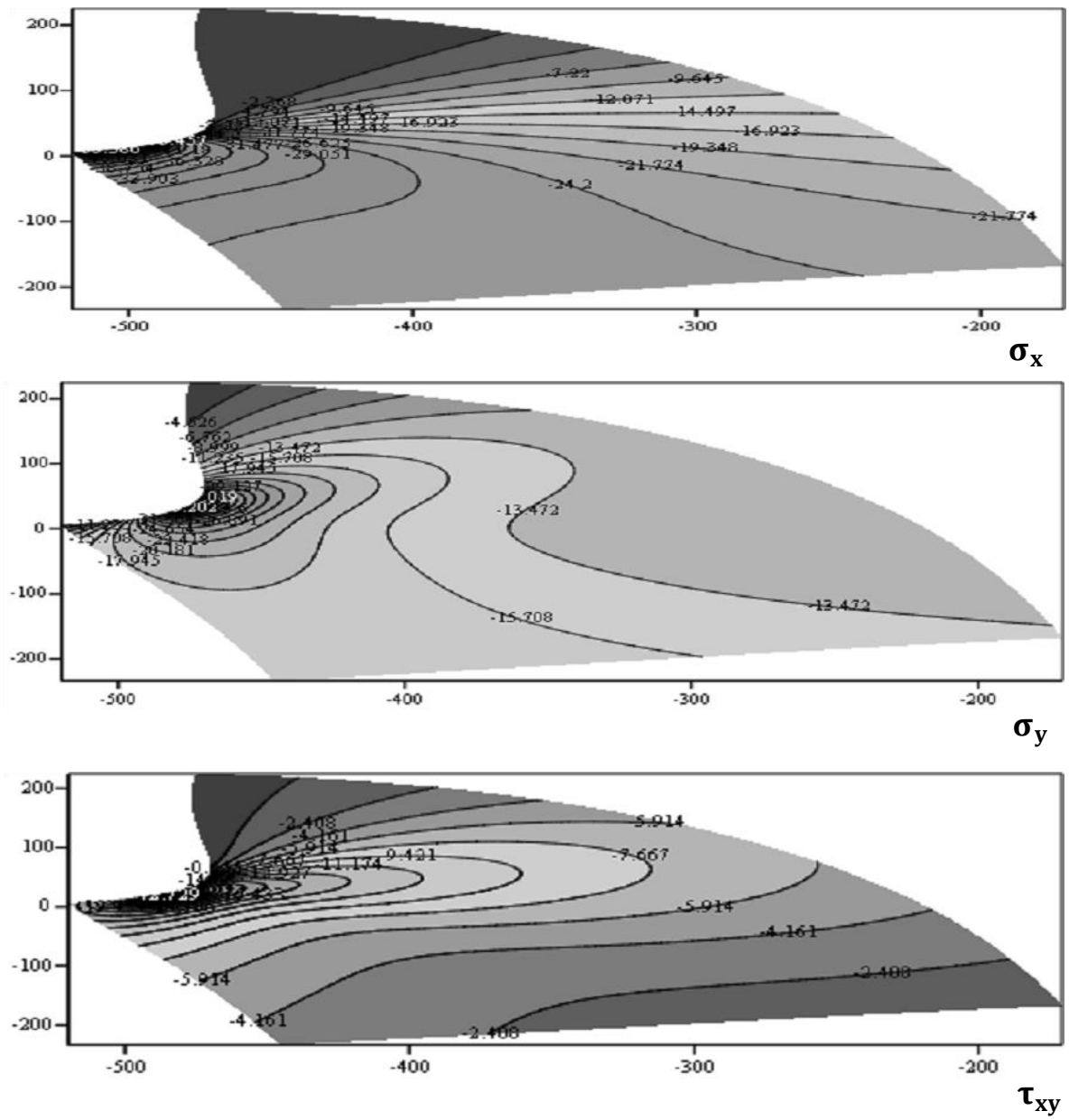


Рисунок 2.2 - Закономерности распределения напряжений в зоне сопряжения борта склона горы с его основанием (МПа)

2.3. Начальное напряженное состояние массива каньона, ограниченного параболическим цилиндром

Разрез сечения массива каньона представляет собой полуплоскость с параболическим вырезом, а интеграл от уравнений равновесия имеет вид:

$$\sigma_x^{\text{п}} = A_1(y-h) + \mathrm{T}_x; \quad \sigma_y^{\text{п}} = A_2(y-h); \quad \tau_{xy}^{\text{п}} = A_3(y-h) \qquad (2.9)$$

где h - глубина каньона; начало оси координат расположено в вершине параболы.

Напряжения с индексом «р» сверху σ_x^{P}, σ_y^{P}, τ_{xy}^{P} – поле напряжений, которые характеризуют влияние рельефа каньона в весомой полуплоскости. Начальное напряженное состояние массивов пород в зоне влияния каньона в условиях влияния вышеперечисленных видов сил [30, 44] представляется в виде суммы первых двух полей напряжений с индексами «*n*» и «*p*» и удовлетворяют на контуре граничным условиям:

$$X_n^* = \left(\sigma_x^p + \sigma_x^n + T_x\right) \cdot (cos(n,x) + \ (\tau_{xy}^p + \tau_{xy}^n)\, cos(n,y) = 0;$$

$$Y_n^* = \left(\ \tau_{xy}^p + \tau_{xy}^n\right) cos(n,x) + \left(\sigma_y^n + \ \sigma_y^p\right) cos(n,y) = 0 \qquad (2.10)$$

где n - направление внешней нормали в какой-либо точке контура.

Условие (2.10) содержит сумму фиктивных нагрузок N и T и нагрузок-усилий $N^{\text{п}}, \text{T}^{\text{п}}$. Последнее возникает от первого поля напряжений (2.9) в контурных точках [44]. Поэтому N и T принимаются равными по величине и противоположными с $N^{\text{п}}, \text{T}^{\text{п}}$.

Ранее в диссертации Э.В. Калинина [61] напряжённое состояние речного каньона, ограниченного параболическим цилиндром в условиях действия гравитационных сил, изучено в рамках метода Колосова-Мусхелишвили [68]. Методика исследований принятое нами реализована с помощью программного комплекса MATHCAD [63]. Второе поле напряжений обусловлено наличием выреза параболической формы с глубиной h в весомой полуплоскости. Оно описано в криволинейной ортогональной системе координат, которая связана с конформным отображением.

$$\omega(\xi,\eta) = i \cdot \zeta(\xi,\eta)^2 + \alpha\zeta(\xi,\eta) \qquad (2.11)$$

Второе поле напряжений характеризуется двумя функциями Мусхелишвили [44, 68] с помощью соотношений:

$$\Phi(\xi,\eta) = \frac{-F_1(\xi,\eta)}{\omega_{p1}(\xi,\eta)}; \quad \Phi p(\xi,\eta) = \frac{-F_1(\xi,\eta) - 2 \cdot i \cdot \Phi(\xi,\eta)}{\omega p_1(\xi,\eta)};$$

$$\Psi(\xi,\eta) = \frac{D\Psi(\xi,\eta)}{\omega p_1(\xi,\eta)}; \qquad (2.12)$$

$$F_1(\xi,\eta) = \left(ad_1(\xi,\eta) + ad_5(\xi,\eta)\right),$$

$$F_1p(\xi,\eta) = \left(ad_1(\xi,\eta) + ad_{51}p(\xi,\eta) + ad_{52}p(\xi,\eta)\right)$$

$$bd_5(\xi,\eta) = bd_2(\xi,\eta) \cdot \ln\left(\frac{\zeta(\xi,\eta) - t_0}{\zeta(\xi,\eta) + t_0}\right)$$

$$t_0 = \sqrt{h} = 34.6 \qquad \alpha = 0.4 \qquad i = \sqrt{-1}$$

$$ad_{51}p(\xi,\eta) = ad_2p(\xi,\eta) \cdot \ln\left(\frac{\zeta(\xi,\eta) - t_0}{\zeta(\xi,\eta) + t_0}\right)$$

$$ad_{51}p(\xi,\eta) = ad_2p(\xi,\eta) \cdot \left(\frac{1}{\zeta(\xi,\eta) - t_0} - \frac{1}{\zeta(\xi,\eta) + t_0}\right)$$

$$F_1p(\xi,\eta) = bd_1(\xi,\eta) + bd_5(\xi,\eta) \qquad \omega cp_2(\xi,\eta) = -2 \cdot i$$

$$\omega p_1(\xi,\eta) = 2 \cdot i \cdot \zeta(\xi,\eta) + \alpha \qquad \omega p_2(\xi,\eta) = 2 \cdot i$$

$$bd_1(\xi,\eta) = C_3\frac{(t_0^3 + t_0^3)}{3} + (C_1 + C_2 \cdot \zeta(\xi,\eta) + C_3 \cdot \zeta(\xi,\eta)^2) \cdot (t_0 + t_0)$$

$$bd_2(\xi,\eta) = C_0 + C_1 \cdot \zeta(\xi,\eta) + C_2 \cdot \zeta(\xi,\eta)^2 + C_3 \cdot \zeta(\xi,\eta)^2$$

$$\omega c(\xi,\eta) = -i \cdot \zeta(\xi,\eta)^2 + \alpha \cdot \zeta(\xi,\eta)$$

$$d_1\psi(\xi,\eta) = -i \cdot \zeta(\xi,\eta)^2 + \alpha \cdot \zeta(\xi,\eta) \qquad d_2\psi(\xi,\eta) = -2 \cdot i \cdot \zeta(\xi,\eta) + \alpha$$

$$\omega cp_1(\xi,\eta) = -2 \cdot i \cdot \zeta(\xi,\eta) + \alpha$$

$$x(\xi,\eta) = Re\left(\omega(\xi,\eta)\right), \qquad y(\xi,\eta) = Im\left(\omega(\xi,\eta)\right)$$

$$CX_1(\xi,\eta) = 2 \cdot \left(\overline{\omega(\xi,\eta)} \cdot \frac{\Phi p(\xi,\eta)}{\omega p_1(\xi,\eta)} + \Psi(\xi,\eta)\right)$$

$$D\Psi(\xi,\eta) = -F_2(\xi,\eta) - d_1\psi(\xi,\eta) \cdot \Phi p(\xi,\eta) - d_2\psi(\xi,\eta) \cdot \Phi(\xi,\eta)$$

$$CX(\xi,\eta) = (4 \cdot Re(\Phi(\xi,\eta))$$

Компоненты напряжений в криволинейных координатах, которые в контурных точках являются нормальными и касательными к контуру должны быть равно нулю. Наименование компонентов напряжений в сокращенном обозначении размещены в начальной строке столбцов таблиц 2.2. - 2.3. Рассмотрены два варианта действия сил, которые учтены в предложенной выше аналитической модели напряженного состояния каньона и для расчёта приняты параметры: $k_c = 0.2$, $\delta = \frac{\pi}{2}$; $\nu = 0.3$, $\lambda = \frac{\nu}{1-\nu}$;

Первый вариант расчета напряженного состояния каньона при действии гравитационных, сейсмических объёмных сил и тектонического сжатия.

Исходные данные для табл. 2.2: T_x = -5.1*МПа*, $\gamma = 2.5 \cdot 10^2$Па.

Таблица 2.2 - Расчет напряжений в массивах каньона при действие гравитационных, сейсмических объемных сил и тектонического сжатия

№	*x (м)*	*y (м)*	σ_1 (МПа)	σ_2 (МПа)	N (МПа)	T (МПа)
1	-6.4	64	$-1.4 \cdot 10^{-9}$	-19	$-1.4 \cdot 10^{-8}$	$-2 \cdot 10^{-7}$
2	-5.6	49	$-1.8 \cdot 10^{-9}$	-19.9	$-1.8 \cdot 10^{-8}$	$-2.1 \cdot 10^{-7}$
3	-4.8	36	$-2.5 \cdot 10^{-9}$	-21.2	$-2.5 \cdot 10^{-8}$	$-2.3 \cdot 10^{-7}$
4	-4.0	25	$-3.9 \cdot 10^{-9}$	-23.1	$-3.9 \cdot 10^{-8}$	$-2.4 \cdot 10^{-7}$
5	-3.2	16	$-6.7 \cdot 10^{-9}$	-26.4	$-6.7 \cdot 10^{-8}$	$-2.2 \cdot 10^{-7}$
6	-2.4	9	$-1.5 \cdot 10^{-8}$	-33.4	$-1.5 \cdot 10^{-7}$	$-5.9 \cdot 10^{-8}$
7	-1.6	4	$-5.1 \cdot 10^{-8}$	-52.6	$-5.1 \cdot 10^{-7}$	$-8.3 \cdot 10^{-7}$
8	-0.8	1	$-4.9 \cdot 10^{-7}$	-143.2	$-4.9 \cdot 10^{-6}$	$-9.3 \cdot 10^{-6}$
9	0	$-8 \cdot 10^{-7}$	$-2.3 \cdot 10^{-5}$	-928	$-2.3 \cdot 10^{-4}$	0
10	0.8	1	$-4.9 \cdot 10^{-7}$	-143.2	$-4.9 \cdot 10^{-6}$	$9.3 \cdot 10^{-6}$

Исходные данные для таблицы 2.3: $T_x = -10$ *МПа*, $\gamma = 2.5 \cdot 10^2$Па.

Таблица 2.3 - Расчет напряжений каньона при совместном действии гравитационной силы и тектонического сжатия

№	*x (м)*	*y (м)*	σ_1 *(МПа)*	σ_2 (МПа)	*N (МПа)*	*T (МПа)*
1	-3.2	64	159.7	$-8.5 \cdot 10^{-6}$	$-8.5 \cdot 10^{-7}$	$2.9 \cdot 10^{-5}$
2	-2.8	49	467.6	$-6.1 \cdot 10^{-6}$	$-6.1 \cdot 10^{-7}$	$3.2 \cdot 10^{-5}$
3	-2.4	36	867	$-2.2 \cdot 10^{-6}$	$-2.2 \cdot 10^{-7}$	$3.4 \cdot 10^{-5}$
4	-2	25	$1.4 \cdot 10^3$	$5.2 \cdot 10^{-6}$	$5.2 \cdot 10^{-7}$	$3.8 \cdot 10^{-5}$
5	-1.6	16	$2.2 \cdot 10^3$	$2.2 \cdot 10^{-5}$	$2.2 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-5}$
6	-1.2	9	$3.3 \cdot 10^3$	$7 \cdot 10^{-5}$	$7 \cdot 10^{-6}$	$-3.8 \cdot 10^{-5}$
7	-0.8	4	$5.3 \cdot 10^3$	$2.6 \cdot 10^{-4}$	$2.6 \cdot 10^{-5}$	$-1.9 \cdot 10^{-6}$
8	-0.4	1	$8.4 \cdot 10^3$	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$-5.9 \cdot 10^{-4}$
9	0	$-1 \cdot 10^{-7}$	$-9.5 \cdot 10^{-3}$	$-1.9 \cdot 10^5$	-0.1	-0
10	0.4	1	$-5.1 \cdot 10^{-5}$	$-2.6 \cdot 10^4$	$-5.1 \cdot 10^{-4}$	$4.7 \cdot 10^{-4}$

Во втором случае совместное действие гравитационной силы и тектонического сжатия приведено в табл. 2.3.

Во всех вариантах действия нагрузок принята такая форма параболы, которая близка к трещине при $\alpha = 0{,}01$ в формуле (2.11). Как видно из табл. 2.2-2.3 концентрация напряжений наблюдается в зоне вершины параболы.

На рис. 2.3 представлены изолинии компонентов напряжений вблизи основания каньона, форма которого изображена при $\alpha = 0{,}6$, при этом рассмотрено действие только силы гравитации. В центре воображаемого центра туннеля начальное напряженное состояние массива принимаем как:

$$S_x = -20 \text{ МПа};\ S_y = -15 \text{ МПа};\ S_{xy} = 10 \text{ МПа}.$$

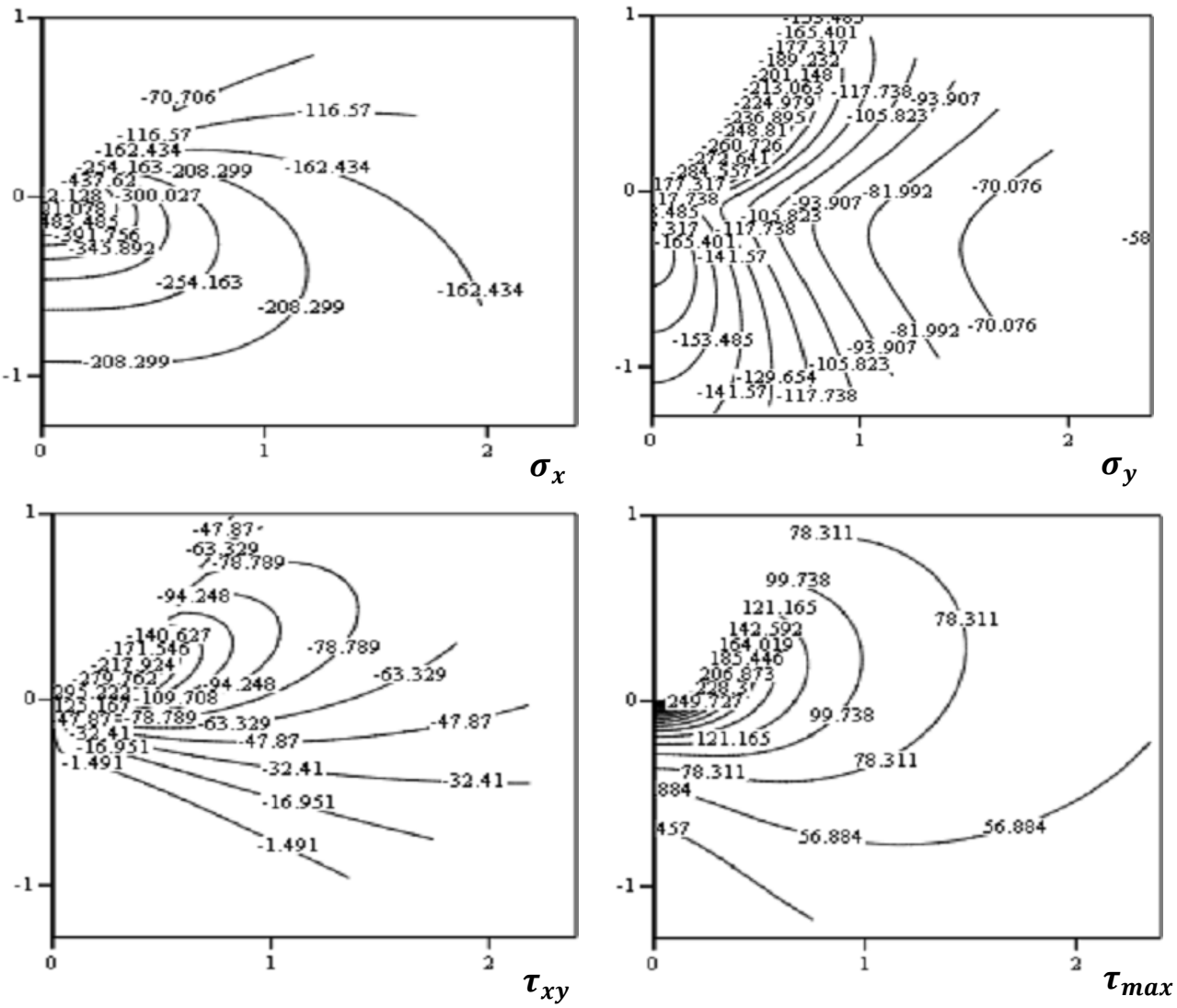


Рисунок 2.3 - Изолинии компонентов напряжений от действия сил гравитации (МПа)

2.4. Начальное напряженное состояние массивов межгорных впадин

Форма рельефа массива - криволинейная поверхность. По этой причине с помощью конформно отображающей функции [44] типа:

$$z = \omega(\zeta); \quad z = x + i \cdot y; \quad i = \sqrt{-1}; \quad \zeta = \xi + i \cdot \eta;$$

вводим криволинейную декартовую систему координат; ξ, η переменные в вспомогательной полуплоскости $\eta \leq 0$. Переменная $-\infty \leq \xi \leq \infty$ ось для действительных чисел, а переменная η для комплексных чисел. Для отображения полуплоскости с двумя выступами вид отображающей функции выбираем в виде [44]:

$$\omega(\zeta) = a \cdot \zeta + \omega_0(\zeta); \; \omega_0(\zeta) = a_1/(\zeta - i) + b_1/\,(\zeta + t_b - i). \quad (2.13)$$

Здесь a, a_1, b_1, t_b постоянные, параметры отображающей функции в (2.13). Разделив при $\eta = 0$ в (6) действительной части $x(\xi)$ от мнимой $y(\xi)$, построены контурные линии полуплоскости с двумя выступами (рис.2.4).

Первый рельеф гор на рис. 2.4 получен при значении следующих параметров:

a=55м; a_1=350 м; $в_1$=575 м; t_b=-22 м.

Второй рельеф гор получен при значении параметров:

a=55м; a_1=575 м; $в_1$=350 м; tb=-22 м.

Последний рельеф соответствует значениям параметров:

a=60м; a_1=400 м; $в_1$=400 м; tb=-14 м.

Отношение производных отображающей функции в (2.13) определяет

$$\omega'(\zeta)/\overline{\omega'(\zeta)} = e^{2i\alpha}; \quad \omega'(\zeta)/\omega'(\zeta) = e^{-2i\alpha} \quad (2.14)$$

где α -угол, составляемый между осью (ξ) с осью ох. Компоненты напряжений $\sigma_x^p, \sigma_y^p, \tau_{xy}^p$ в криволинейных координатах обозначается через $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \tau_{\xi\eta}$. Аргументами напряжений становятся теперь переменные ξ, η. В контурных точках $\sigma_\eta = N$ и $\tau_{\xi\eta} = T$ действуют по нормали и по касательной.

Согласно представлению (2.4) на контурных точках граничное условие (2.5) состояло из суммы фиктивных нагрузок N и T и нагрузок-усилий $N^{П}, T^{П}$.

Первые возникают от второго поля напряжений, которые возникают от найденного поля напряжений (*). Причем N и T равны по величине и противоположны с $N^{П}, T^{П}$. Следовательно, суммарное поле напряжений в (2.4) должно обеспечить выполнение граничных условий (2.15).

Переход от компонентов напряжений $\sigma_x^p, \sigma_y^p, \tau_{xy}^p$ к компонентам напряжений $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \tau_{\xi\eta}$ и наоборот реализуется с помощью формул (2.13) и (2.14) [68, см. § 92]:

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_\xi + \sigma_\eta,\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = (\sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta})e^{-2i\alpha}; \quad (2.15)$$

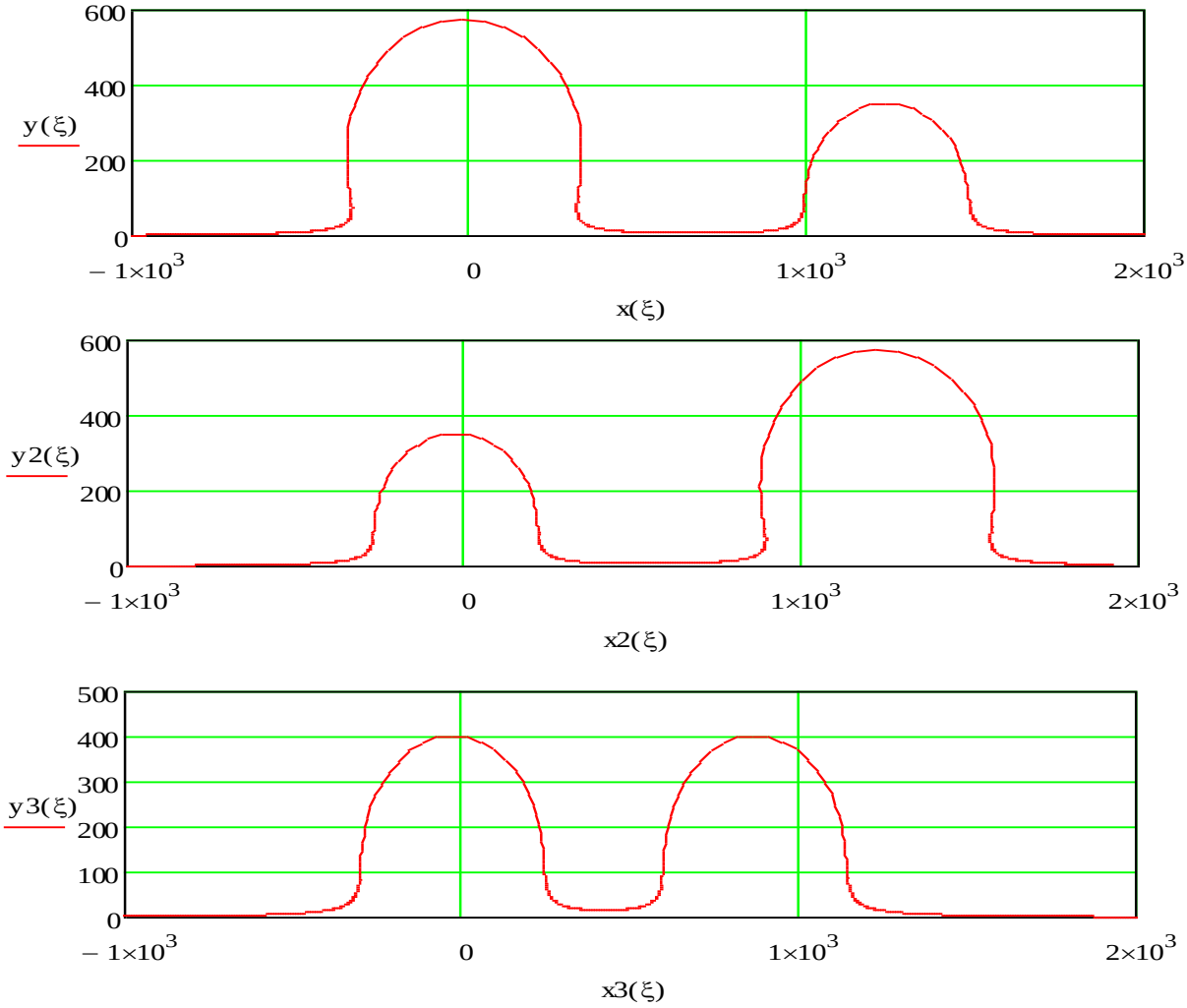


Рисунок 2.4 - Контуры впадин между гор с различными высотами (м)

Компоненты напряжений $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \tau_{\xi\eta}$ выражаются функциями $\Phi(\zeta), \Psi(\zeta)$ с помощью соотношений [68, см. § 92]:

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = 2(\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}),$$

$$\sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta} = 2(\overline{\omega(\zeta)}\Phi(\zeta)' + \omega(\zeta)'\Psi(\zeta))/\overline{\omega(\zeta)'} \qquad (2.16)$$

Функции $\Phi(\zeta), \Psi(\zeta)$ являются решением граничной задачи:

$$\Phi(t)\,\omega(t)' + \overline{\Phi(t)}\,\omega(t)' + \omega(t)\,\overline{\Phi(t)'} + \overline{\omega(t)'}\,\overline{\Psi(t)} = [N(t) - i\,T(t)]\omega(t)',$$

$$\Phi(t)\,\overline{\omega(t)'} + \overline{\Phi(t)}\,\overline{\omega(t)'} + \overline{\omega(t)}\,\Phi(t)' + \omega(t)'\Psi(t) = [N(t) + i\,T(t)]\overline{\omega(t)'}. \quad (2.17)$$

Интегралы типа Коши от граничных условий (2.5) имеют вид

$$\Phi(\zeta)\cdot\omega'(\zeta) + G(\zeta) = B(\zeta),$$

$$\Psi(\zeta)\cdot\omega'(\zeta) + \Phi(\zeta)\cdot\overline{\omega}(\zeta) + \Phi'(\zeta)\cdot\overline{\omega'}(\zeta) - \overline{G}(\zeta) = A(\zeta),$$

$$G(\zeta) = -a_1\overline{\Phi_1}/[\zeta - i]^2 - b_1\overline{\Phi_2}/[\zeta + t_b - i]^2 \qquad (2.18)$$

где, обозначены интегралы для правой части уравнений через $A(\zeta), B(\zeta)$:

$$A(\xi,\eta) = \omega_0(\xi,\eta)[T_5 + T_6\omega_0{}'(\xi,\eta)] + T_3C(\xi,\eta) + At(\xi,\eta) - T_6\,S(\xi,\eta),$$

$$B(\xi,\eta) = T_3\omega_0(\xi,\eta)\omega_0{}'(\xi,\eta) + T_2\omega_0(\xi,\eta) + T_4C(\xi,\eta) + Bt(\xi,\eta) - T_3\,S(\xi,\eta). \qquad (2.19)$$

В (2.19) приняты укороченные записи выражений:

$$At(\xi,\eta) = T_1\omega_0{}'(\xi,\eta); \quad Bt(\xi,\eta) = -T_1\omega_0{}'(\xi,\eta)$$

$$C(\xi,\eta) = C_1/\,(\zeta - i) + C_2/\,(\zeta + t_b - i)^2$$

$$S(\xi,\eta) = S_1/(\zeta(\xi,\eta) - i) + S_2/[\zeta(\xi,\eta) - i]^2 + S_3/(\zeta(\xi,\eta) + t_b - i) + S_4/[\zeta(\xi,\eta) + t_b - i]^2;$$

$$T_1 = \frac{T_x}{2};\ T_2 = a\left(\frac{A_3 + iA_2)}{2}\right); \quad T_3 = i\left(\frac{A_1 + A_2)}{4}\right); T_4 = -i(A_1 - A_2 + 2\,iA_3)\,/4;$$

$$T_5 = a\left(-\frac{A_3 + iA_2)}{2}\right);\ T_6 = -i(A_1 - A_2 - 2\,iA_3)\,/4;$$

$$\Omega_0 = \omega_0(-\,i)\,; \Omega_1 = \omega_0'(-\,i)\,;\ \Omega_{tb} = \omega_0(-\,t_b - i)\,; \Omega_{ptb} = \omega_0'(-\,t_b - i)\,;$$

$$C_1 = a_1\overline{\Omega_1}; C_2 = b_1\overline{\Omega_{ptb}};$$

$$S_1 = -a_1\overline{\Omega_1}; S_2 = -\,a_1\overline{\Omega_0}; S_3 = -b_1\overline{\Omega_{ptb}}; S_4 = -\,b_1\overline{\Omega_{tb}};$$

В первом уравнении (2.18), $G(\zeta)$ является полюсом функции $\overline{\Phi(\zeta)}$ и содержат Φ_1 и Φ_2 и ими сопряженные ещё две постоянные. Они определяются из системы 4 линейных уравнений, если последовательно предположим в (2.18)

$$\zeta_1 = -i,\ \zeta_2 = -t_b - i.$$

Правые части этой системы обозначены:

$$M0_0 = B(0,-1);\ M0_1 = B(-t_b,-1); M0_2 = \overline{B(0,-1)};\ M0_3 = \overline{B(-t_b,-1)};$$

Введем в (2.13) для ясности следующие обозначения:

$$n_1(\zeta) = -\,a_1/\,(\zeta - i)^2\,; n_2(\zeta) = -b_1/(\zeta + t_b - i)^2\,;$$

Тогда коэффициенты в левой части системы определяется в виде:

$$M_{0,0} = \omega'(-\,i)\,;\ M_{0,1} = 0; M_{0,2} = n_1(-i);\ M_{0,3} = n_2(-i);$$

$$M_{1,0} = 0; M_{1,1} = \omega'(-\,t_b - i)\,; M_{1,2} = n_1(-\,t_b - i)\,; M_{1,3} = n_2(-\,t_b - i)\,;$$

$$M_{2,0} = \overline{M_{0,2}};\ \ M_{2,1} = \overline{M_{0,3}};\ \ M_{2,2} = \overline{M_{0,0}};\ \ M_{2,3} = 0;$$

$$M_{3,0} = \overline{M_{1,2}};\ \ M_{3,1} = \overline{M_{1,3}};\ \ M_{3,2} = 0;\ \ M_{3,3} = \overline{M_{1,1}};$$

Решение системы в нотациях MATHCAD размещено в элементах вектора столбца Λ :

$$\Lambda = M^{-1} \cdot M_0 = \begin{pmatrix} -1.7 - 0.5i \\ -1.7 + 0.5i \\ -1.7 + 0.5i \\ -1.7 - 0.5i \end{pmatrix}$$

При вычислении $\Psi(\zeta)$ в окрестности точек $\zeta_1 = -i, \zeta_2 = -t_b - i$, предусмотрены альтернативные соотношения чем в (2. 18), при котором явно раскрыто отсутствие кажущегося наличия полюса $\overline{G}(\zeta)$ функции $\Psi(\zeta)$. Процедура расчета полей напряжений реализована путем записи всех соотношениях в нотациях MATHCAD, для контурных точек переменная $\eta = 0$, $\zeta = t$. Вычисленные значения компонентов напряжений приведены в табл. 2.4. На рис. 2.5 представлены изолинии компонентов напряжений для массивов впадины между гор, изображенной на рис. 2.4 с контурной линией x_3 и y_3.

Рассмотрено действие силы гравитации и тектоническое сжатие $T_x = 15$ Мпа. Векторы трёхмерных поверхностей компонентов напряжений обозначены:

$$F_x(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} X(\xi,\eta) \\ Y(\xi,\eta) \\ \sigma_x(\xi,\eta) \end{pmatrix}, \quad F_y(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} X(\xi,\eta) \\ Y(\xi,\eta) \\ \sigma_y(\xi,\eta) \end{pmatrix}, \quad F_{\tau xy}(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} X(\xi,\eta) \\ Y(\xi,\eta) \\ \tau_{xy}(\xi,\eta) \end{pmatrix},$$

$$F_{\tau max}(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} X(\xi,\eta) \\ Y(\xi,\eta) \\ \tau_{max}(\xi,\eta) \end{pmatrix}$$

Таблица 2.4 - Компоненты напряжений для контурных точек

0	*«t»*	*x (м)*	*y (м)*	*cig 1*	*cig 2*	*N (МПа)*	*T (МПа)*	T_{max} *(МПа)*
1	-5	-397.9	16.5	$1.8 \cdot 10^{-15}$	-26.1	$2.9 \cdot 10^{-15}$	$1.8 \cdot 10^{-15}$	-24.3
2	-4	-356.3	24.8	$1.1 \cdot 10^{-14}$	-33.4	$-9.8 \cdot 10^{-15}$	$-5.3 \cdot 10^{-15}$	-23.6
3	-3	-323.4	41.4	$7.1 \cdot 10^{-15}$	-39.5	$7.1 \cdot 10^{-15}$	$8.2 \cdot 10^{-15}$	-0.4
4	-2	-304.9	81.6	$-9.8 \cdot 10^{-15}$	-11.2	$-1 \cdot 10^{-15}$	$-2.9 \cdot 10^{-15}$	-10.1
5	-1	-286.5	201.8	$3.6 \cdot 10^{-15}$	-0.8	$3.6 \cdot 10^{-15}$	$-1.5 \cdot 10^{-15}$	-0.6
6	0	-28.4	402	0	-0.1	0	0	-0.1
7	1	229.4	202.4	$-2.1 \cdot 10^{-15}$	-0.7	$-2 \cdot 10^{-15}$	$-1.8 \cdot 10^{-15}$	-0.5
8	2	246.9	82.8	$-2.7 \cdot 10^{-15}$	-10.4	$-1.7 \cdot 10^{-15}$	0	-9.6
9	3	263.9	43.3	0	-40.9	$3.6 \cdot 10^{-15}$	$-1.9 \cdot 10^{-15}$	-0.1
10	4	294.5	27.5	$3.6 \cdot 10^{-15}$	-36.4	$4.4 \cdot 10^{-15}$	$-1.8 \cdot 10^{-15}$	-25.9

Из табл. 2.4 видно то, что для контурных точек впадины между гор условие (2.12) при $N = T = 0$ выполняется с высокой точностью, где величина погрешности не более 10^{-15}; высота гор 402 м; наибольшее значение главной нормальной компоненты напряжений $\sigma_2 =$ - 40,9 *МПа*.

Для локальной зоны основания впадины между гор на рис. 2.5 представлены изолинии распределения компонентов напряжений.

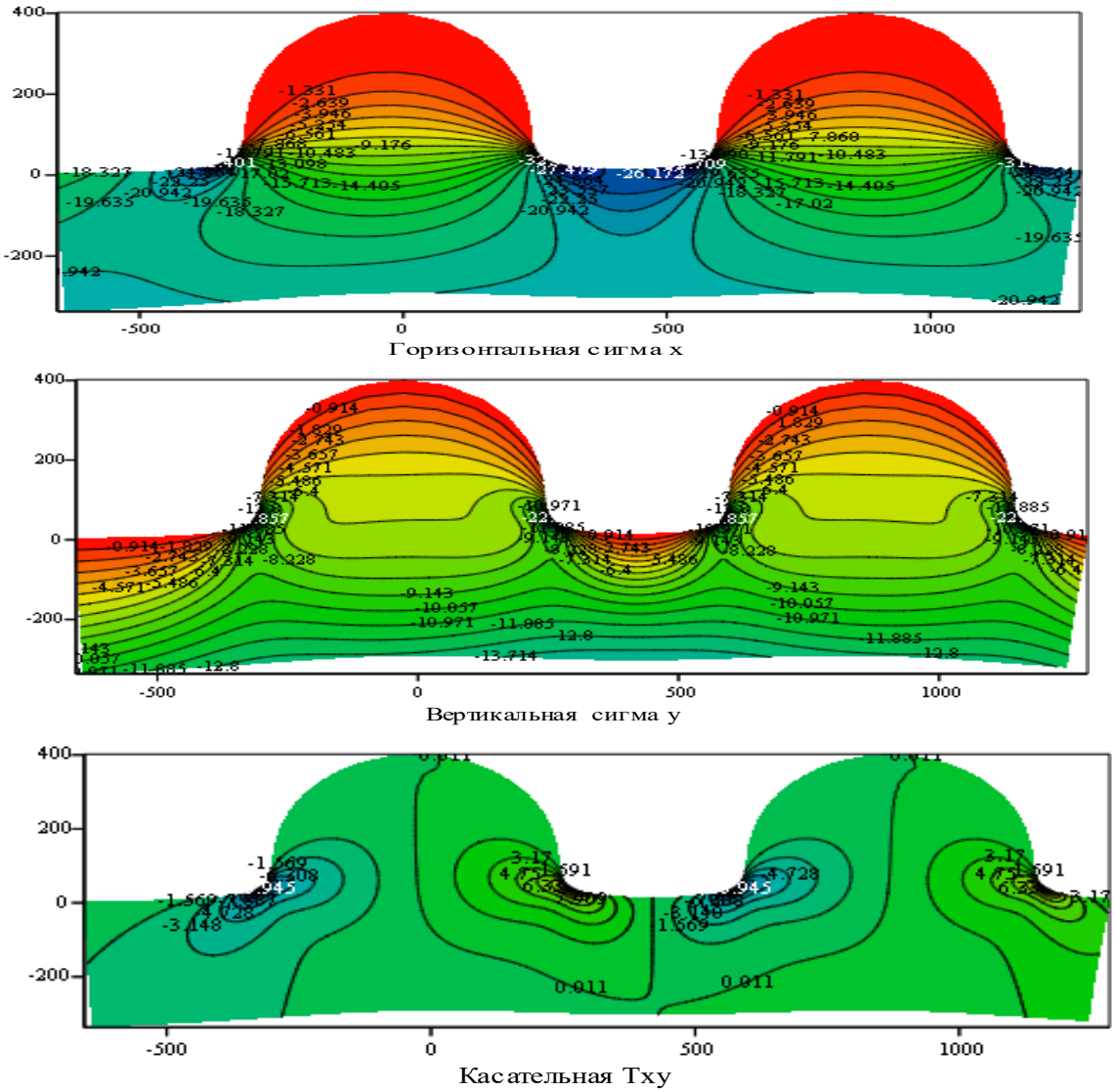


Рисунок 2.5 - Распределение напряжений в массивах межгорной впадины (МПа)

Как видно из рисунка, изолинии напряжений в зоне основания, где горизонтальная компонента на глубине до 300 м растет незначительно от -21,5 МПа до -25,7 МПа; вертикальная компонента увеличивается от 0 до -12 МПа почти линейно; касательная компонента на оси симметрии гор равна нулю и имеет максимальное значение 18 *МПа* в зоне сопряжения борта склона горы с его основанием.

Новая технология проведения исследования распределения напряжений в программной системе MATHCAD включает сперва образование трехмерного вектора-столбца, у которого первый элемент двухмерный массив для абсцисс

точек массива, второй элемент ординаты точек и третий элемент - это компонент напряжений, где в этих точках вычислены напряжения. Графическая функция MATHCADa Gretmesh имеет 7 аргументов. Первый аргумент – имя вектора столбца; второй и третий элемент начало и конец первого переменного вектора столбца; четвертый и пятый элемент начало и конец второго переменного вектора столбца; шестой и седьмые элементы содержит количества делений первого и второго аргумента вектора столбца. Расположим центр воображаемого туннеля в таком месте межгорной впадины, где:

$$S_x=-21{,}7\ МПа;\ S_y=-\ 11\ МПа;\ S_{xy}=17МПа.$$

На рис. 2.6 показаны вариации, где начало и конец аргументов вектора столбца изолинии напряжений построены только для локальной зоны склона горы.

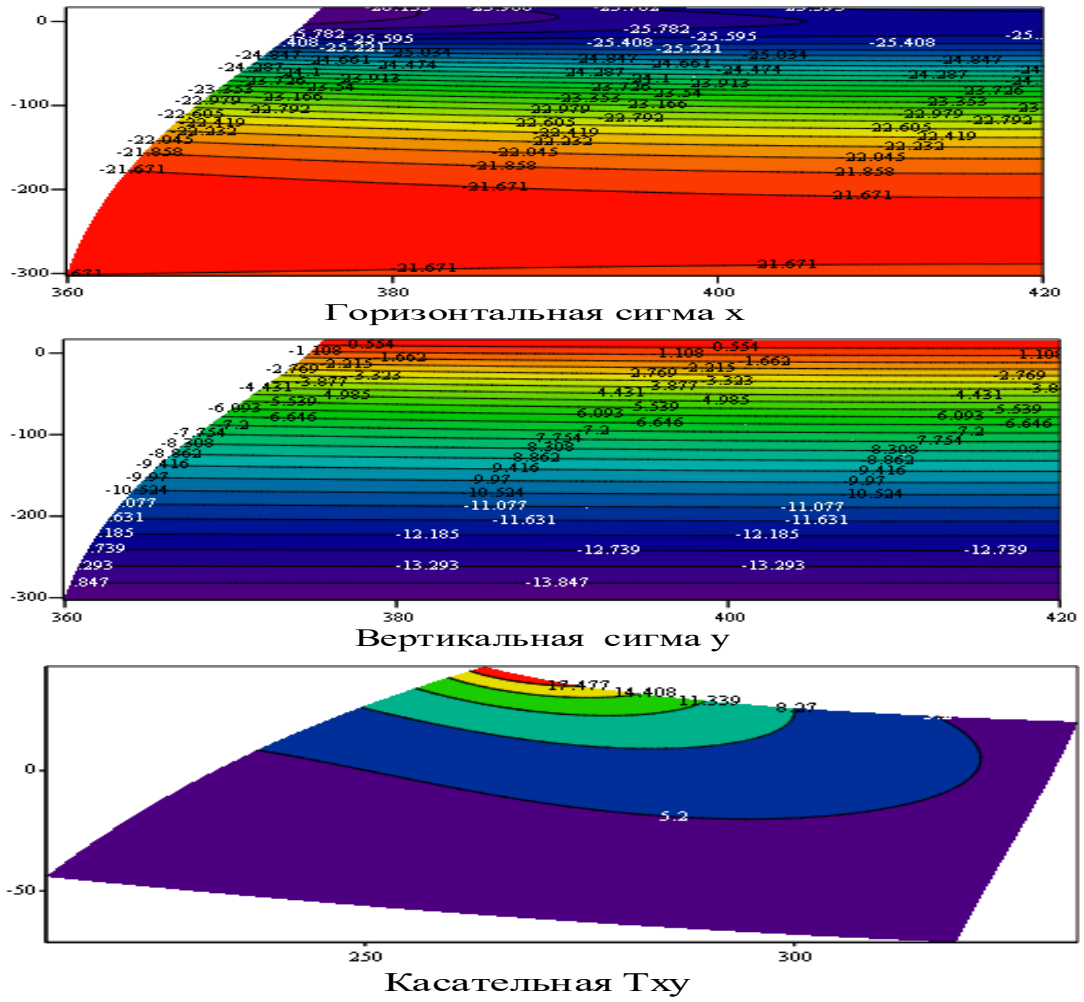


Рисунок 2.6 - Распределение напряжений в массивах в основании впадины (МПа)

2.5. Начальное напряженное состояние массива речного каньона

Рельеф каньона в разрезе представляет собой полуплоскость с одним криволинейным вырезом. Для определения напряжений в (2.4) воспользуемся аппаратом конформного отображения с помощью функции:

$$z = \omega(\zeta); z = x + i \cdot y; \zeta = \xi + i \cdot \eta; i = \sqrt{-1};$$

$$\omega(\zeta) = a \cdot \zeta + \omega_0(\zeta); \omega_0(\zeta) = a_1/(\zeta - \iota); \qquad (2.21)$$

Присвоив численные значения параметрам, *a=340; a_1=-300 м* с помощью функции (2.20) построим форму выреза-каньона, которая представлена на рис. 2.7.

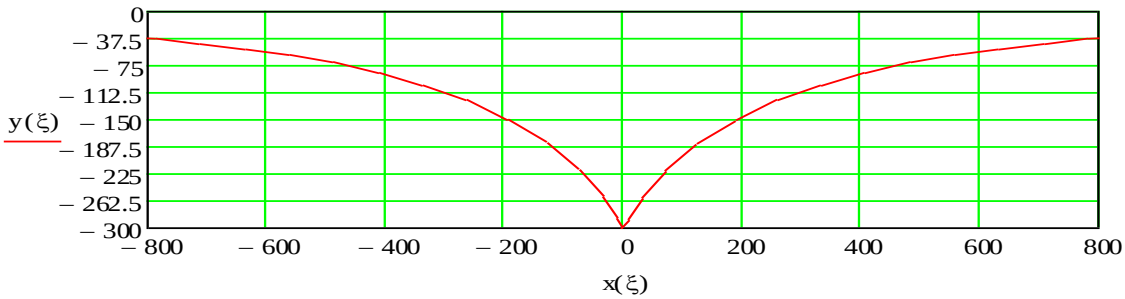


Рисунок 2.7 - Форма каньона (м)

Для вычисления начального состояния каньона используем приведенные соотношения в п.2.2 для расчета одиночных гор, где изменим значение параметра для высоты гор на значение глубины каньона a_1 = *-300 м*.

Выполним расчет начального напряженного состояния каньона без туннеля в (2.21). Значения компонентов напряжений для контурных точек каньона приведены в табл. 2.5 с соответствующими именами. Распределение напряжений, которые вычислены относительно декартовых координат, представлены для каждого компонента напряжений на рис. 2.8. и приняты как:

$$\lambda = 0{,}5; \gamma = 2{,}75 \cdot 10^{-2}; T_x = -20 МПа.$$

Наибольшее значение вертикального нормального напряжения имеет место в зоне сопряжения борта каньона с его основанием и равно -86,2 МПа. Горизонтальная нормальная компонента в этой же зоне наибольшая и равна -390,2 МПа. Максимальное касательное напряжение в этой зоне равно 29,4 МПа.

По мере удаления от зоны основания на 30 - 50 метров все компоненты напряжений быстро уменьшаются. Например, горизонтальная компонента не более -59 МПа; вертикальная компонента не более -20 МПа; касательная компонента не более 15 Мпа.

Таблица 2.5 - Значения компонентов напряжений на контуре каньона

0	x(м)	y (м)	cig x	cig y	txy	N (МПа)	T (МПа)	T_{max} (МПа)
1	-5	$-1.6 \cdot 10^{3}$	-11.5	$1.8 \cdot 10^{-15}$	-18.3	0	0	-18.
2	-4	$-1.3 \cdot 10^{3}$	-17.6	$-1.8 \cdot 10^{-15}$	-17.5	$-1.8 \cdot 10^{-15}$	0	-17.5
3	-3	-930	-30	0	-16.2	$-1.3 \cdot 10^{-15}$	0	-16
4	-2	-560	-60	0	-13.8	0	0	-13
5	-1	-190	-150	0	-10.9	0	0	-4.9
6	0	0	-300	$-2.8 \cdot 10^{-13}$	-431	$-2.8 \cdot 10^{-15}$	0	-431
7	1	190	-150	0	-10.9	0	0	-4.9
8	2	560	-60	0	-13.8	0	0	-13
9	3	930	-30	0	-16.2	$-1.5 \cdot 10^{-15}$	0	-16
10	4	$-1.3 \cdot 10^{3}$	-17.6	$-1.8 \cdot 10^{-15}$	-17.5	$-1.8 \cdot 10^{-15}$	0	-17.5

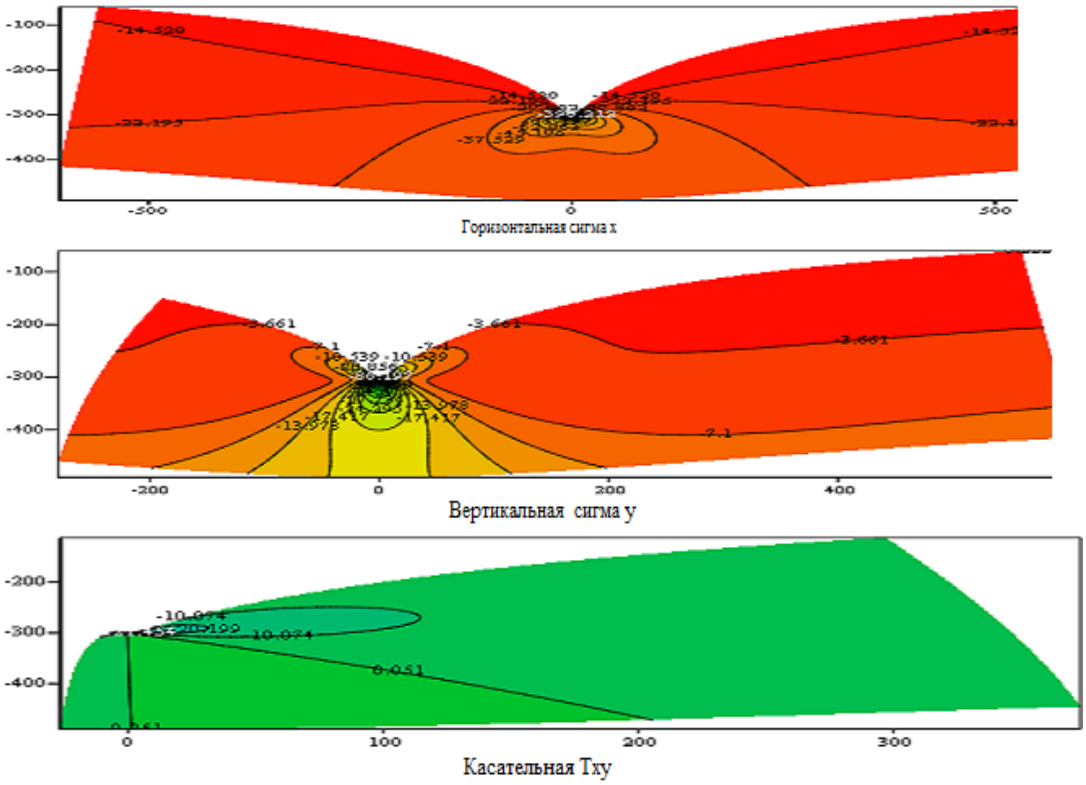


Рисунок 2.8 - Распределение напряжений в массивах каньона (Мпа)

ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 2

1. Выполнен прогноз начального напряженного состояния массивов для:
   - одиночной горы (п. 2.2),
   - каньона, ограниченного параболическим цилиндром (п. 2.3),
   - межгорной впадины (п. 2.4) и речного каньона (п. 2.5).
2. Установленные закономерности распределения напряжений в таблицах 2.1-2.5 и на рисунках 2.2, 2.3, 2,5, 2,6, 2.8 являются новыми, которые в отличие от подобных результатов других авторов Э.В. Калинина [61], Д.М. Ахпателова [73] и Г. Нейбера [70] учитывают совместное действие гравитационных, равномерных сейсмических и горизонтальных тектонических сил.
3. Использована новая технология расчета и обработки данных, графические представления результатов расчета полей напряжений выполнены в программной системе MATHCAD.
4. Результаты расчета напряжений в воображаемом центре туннеля получены численным методом и обозначены через:

   S_x – горизонтальная нормальная компонента напряжений;

   S_y – вертикальная нормальная компонента напряжений;

   S_{xy} – касательная компонента напряжений.
5. Использование технологических исследований в среде MATCHAD [63], как видно из (2.2) – (2.5), оперативно и без затруднений позволило вычислить начальное напряженное состояние массивов с различным рельефом.
6. Отдельные результаты главы опубликованы в работах автора [20-36] совместно с Б. Жумабаевым.

Глава 3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В МАССИВАХ ВОКРУГ ТУННЕЛЕЙ

3.1. Постановка задачи о образовании туннеля в горном массиве

Согласно изложенной в п. 2.1 задаче напряженное состояние массивов вокруг туннелей состоит из первых в (2.1) трех полей напряжений, которые в контурных точках туннеля удовлетворяют граничным условиям:

$$(\sigma_x^p + \sigma_x^n + T_x + \sigma_x^m) \cdot (\cos n, x) + (\tau_{xy}^n + \tau_{xy}^p + \tau_{xy}^m) \cdot \cos(n, y) = 0$$

$$(\tau_{xy}^n + \tau_{xy}^p + \tau_{xy}^m) \cdot \cos(n, y) + (\sigma_y^p + \sigma_y^n + \sigma_y^m) \cdot (\cos n, y) = 0 \qquad (3.1)$$

Сумма первых двух полей напряжений определено в главе 2 и вычисленные значения компонент в центре воображаемого туннеля обозначены через S_x, S_y, S_{xy}. Поэтому поле напряжений от образования туннеля $\sigma_x^m, \sigma_y^m, \tau_{xy}^m$ будем искать из граничного условия (3.1). Формы отверстий, с помощью которых моделируется поперечные сечения туннелей весьма разнообразны и имеют сложные конфигурации. Для удобства дальнейших рассуждений используем конформные отображения внешности отверстий на внешность единичного вспомогательного комплексного переменного $\zeta = \rho e^{i\theta}$с помощью отображающей функции:

$$z = \omega(\zeta);\ z = x + \iota \cdot y;\ \omega(\zeta) = e^{i\delta} R[\zeta + \omega_0(\zeta)];\ \omega_0(\zeta) = \sum_{k=1}^{5} d_k/\zeta^k \qquad (3.2)$$

Здесь $1 \le \rho \le \infty$ ось положительных чисел; $0 \le \theta \le 2\pi$- в радианах.

R – коэффициент для изменения размеров отверстия;

δ – параметр (в радианах) для установления ориентации оси симметрии отверстия относительно горизонтальной оси.

Параметры отображающей функции d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 путем вариации их значений достигается моделированием разнообразных и сложных форм поперечных сечений туннелей. Отображение принимается конформным, если выполняются основные три признаки [66, 76]. Первым признаком конформности отображений является соответствие контурных точек отверстия с контурными точками единичной окружности в плоскости $\zeta(1, \theta)$.

В частности,

$$\omega 1(\rho,\theta) = R \cdot \left(\zeta(\rho,\theta) + \frac{0.307}{\zeta(\rho,\theta)} + \frac{0.11}{\zeta(\rho,\theta)^3} - \frac{0.01}{\zeta(\rho,\theta)^5}\right)$$

x1(θ)=Re (ω1(1, θ) y1(θ)= Im(ω1(1,θ)

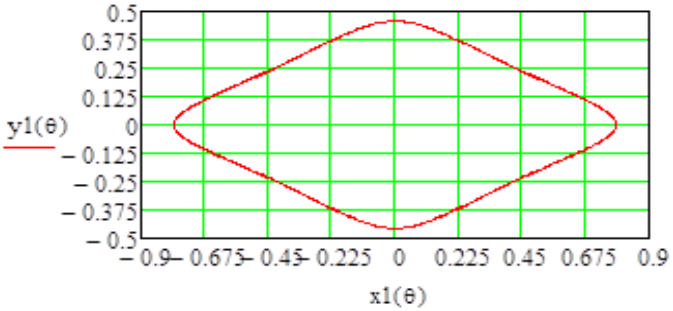


Рисунок 3.1 - Трапециевидное сечение туннеля

$$\omega 2(\rho,\theta) = R \cdot \left(\zeta(\rho,\theta) + \frac{0.470}{\zeta(\rho,\theta)} - \frac{0.0588}{\zeta(\rho,\theta)^3}\right)$$

$$x2(\theta) = Re(\omega 2(1,\theta) \qquad y2(\theta) = Im(\omega 2(1,\theta)$$

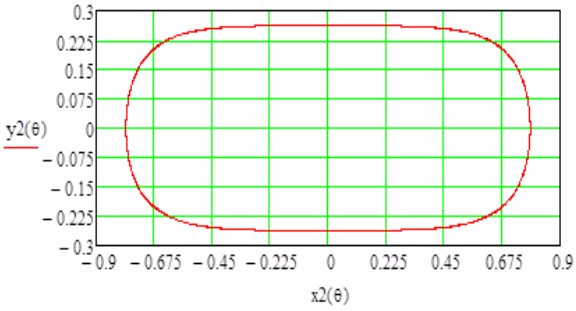


Рисунок 3.2 - Овальное сечение туннеля с соотношением сторон 1/3

$$\omega 3(\rho,\theta) = R \cdot \left(\zeta(\rho,\theta) + \frac{0.301}{\zeta(\rho,\theta)} - \frac{0.049}{\zeta(\rho,\theta)^3}\right)$$

$$x3(\theta) = Re(\omega 3(1,\theta) \qquad y3(\theta) = Im(\omega 3(1,\theta)$$

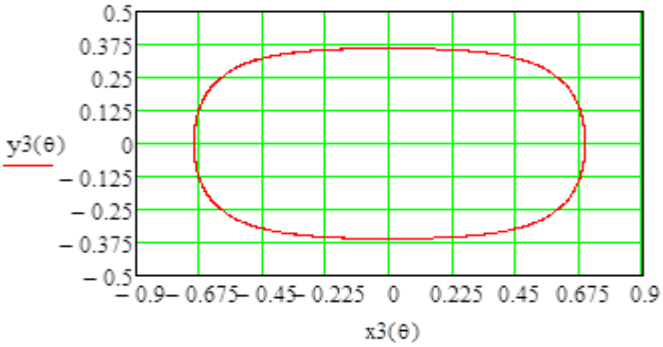


Рисунок 3.3 - Овальное сечение туннеля с отношением сторон 1/2

$$\omega 4(\rho,\theta) = R \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\zeta(\rho,\theta) + \frac{0.1410}{\zeta(\rho,\theta)} + \frac{0.065}{\zeta(\rho,\theta)^2} - \frac{0.09}{\zeta(\rho,\theta)^3} + \frac{0.037}{\zeta(\rho,\theta)^4} + \frac{0.0019}{\zeta(\rho,\theta)^5}\right)$$

$$x4(\theta) = Re(\omega 4(1,\theta) \qquad y4(\theta) = Im(\omega 4(1,\theta)$$

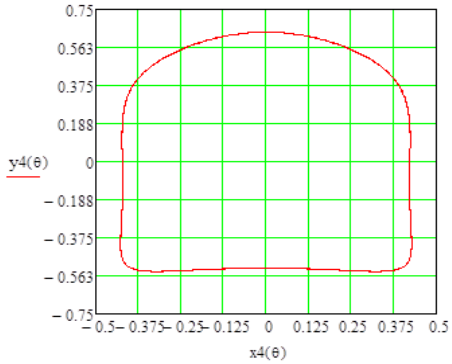


Рисунок 3.4 - Сводчатое сечение туннеля с развитыми вертикальными стенками

$$\omega 5(\rho,\theta) = R \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\zeta(\rho,\theta) + \frac{0.06}{\zeta(\rho,\theta)} + \frac{0.100}{\zeta(\rho,\theta)^2} - \frac{0.029}{\zeta(\rho,\theta)^3} + \frac{0.015}{\zeta(\rho,\theta)^4}\right)$$

$$x5(\theta) = Re(\omega 5(1,\theta) \qquad y5(\theta) = Im(\omega 5(1,\theta)$$

Рисунок 3.5 - Корытообразное сечение туннеля

$$\omega 6(\rho,\theta) = R \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\zeta(\rho,\theta) + \frac{0.089}{\zeta(\rho,\theta)} + \frac{0.047}{\zeta(\rho,\theta)^2} - \frac{0.114}{\zeta(\rho,\theta)^3} + \frac{0.037}{\zeta(\rho,\theta)^4}\right)$$

$$x6(\theta) = Re(\omega 6(1,\theta) \qquad y6(\theta) = Im(\omega 6(1,\theta)$$

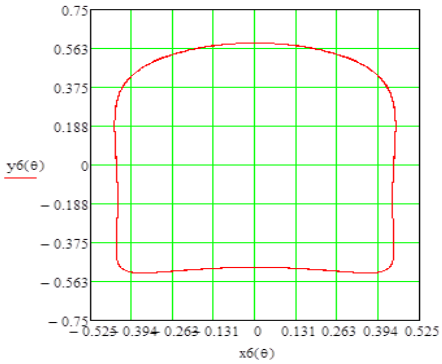


Рисунок 3.6 - Сводчатое сечение туннеля

$$\omega 7(\rho,\theta) = R \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\zeta(\rho,\theta) - \frac{0.021}{\zeta(\rho,\theta)} + \frac{0.102}{\zeta(\rho,\theta)^2} - \frac{0.150}{\zeta(\rho,\theta)^3} - \frac{0.026}{\zeta(\rho,\theta)^4} - \frac{0.002}{\zeta(\rho,\theta)^5}\right)$$

$$x7(\theta) = Re(\omega 7(1,\theta) \qquad y7(\theta) = Im(\omega 7(1,\theta)$$

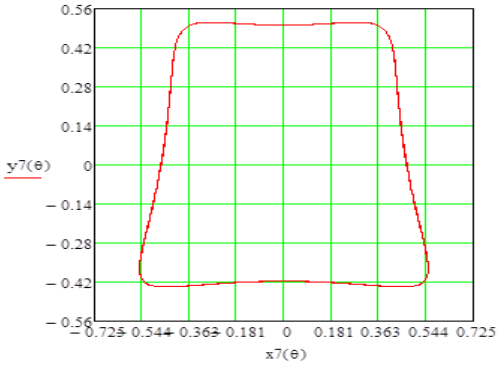


Рисунок 3.7 - Трапециевидное однопутьевое сечение туннеля

$$\omega 8(\rho,\theta) = R \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\zeta(\rho,\theta) - \frac{0.017}{\zeta(\rho,\theta)} + \frac{0.058}{\zeta(\rho,\theta)^2} - \frac{0.140}{\zeta(\rho,\theta)^3} + \frac{0.010}{\zeta(\rho,\theta)^4}\right)$$

$$x8(\theta) = Re(\omega 8(1,\theta) \qquad y8(\theta) = Im(\omega 8(1,\theta)$$

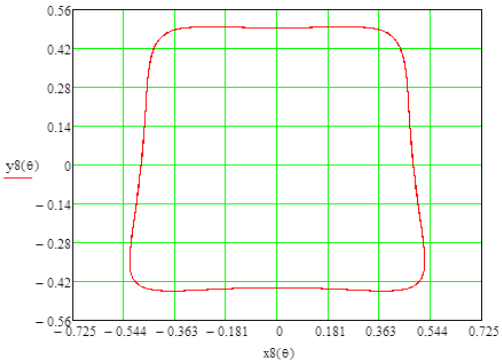


Рисунок 3.8 - Трапециевидное двухпутьевое сечение туннеля

$$\omega 9(\rho,\theta) = R \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\zeta(\rho,\theta) - \frac{0.011}{\zeta(\rho,\theta)} + \frac{0.027}{\zeta(\rho,\theta)^2} - \frac{0.053}{\zeta(\rho,\theta)^3} + \frac{0.020}{\zeta(\rho,\theta)^4}\right)$$

$$x9(\theta) = Re(\omega 9(1,\theta) \qquad y9(\theta) = Im(\omega 9(1,\theta)$$

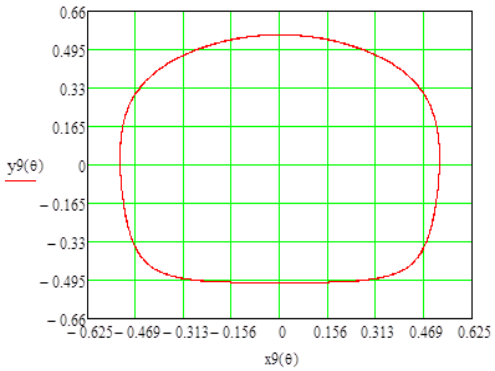


Рисунок 3.9 - Подковообразное сечение туннеля

$$\omega 10(\rho,\theta) = R \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\zeta(\rho,\theta) - \frac{0.154}{\zeta(\rho,\theta)} + \frac{0.032}{\zeta(\rho,\theta)^2} - \frac{0.0160}{\zeta(\rho,\theta)^3} - \frac{0.010}{\zeta(\rho,\theta)^4}\right)$$

$$x10(\theta) = Re(\omega 10(1,\theta) \qquad y10(\theta) = Im(\omega 10(1,\theta)$$

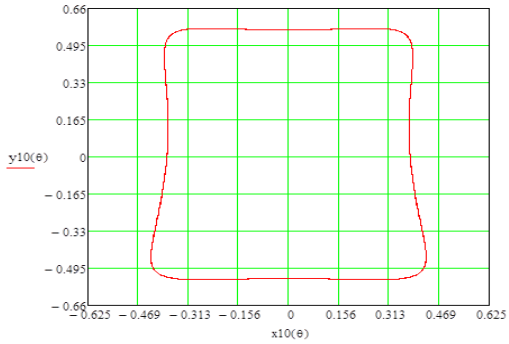


Рисунок 3.10 - Трапециевидное с расширяющимся низом сечение туннеля

$$\omega 11(\rho,\theta) = R \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\zeta(\rho,\theta) + \frac{0.035}{\zeta(\rho,\theta)^2} - \frac{0.0819}{\zeta(\rho,\theta)^3} - \frac{0.042}{\zeta(\rho,\theta)^4}\right)$$

$$x11(\theta) = Re(\omega 11(1,\theta) \qquad y11(\theta) = Im(\omega 11(1,\theta)$$

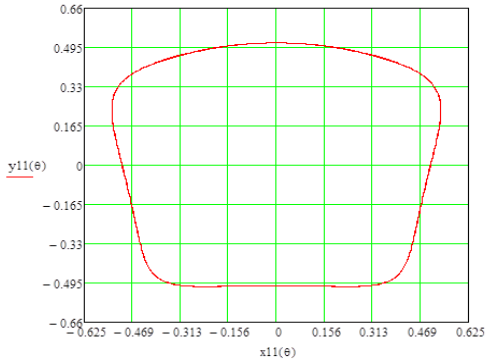


Рисунок 3.11 - Сводчатое с сужающимся низом сечение туннеля

$$\omega 12(\rho,\theta) = R \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\zeta(\rho,\theta) - \frac{0.307}{\zeta(\rho,\theta)} + \frac{0.012}{\zeta(\rho,\theta)^2} - \frac{0.0115}{\zeta(\rho,\theta)^3} + \frac{0.013}{\zeta(\rho,\theta)^5}\right)$$

$$x12(\theta) = Re(\omega 12(1,\theta) \qquad y12(\theta) = Im(\omega 12(1,\theta)$$

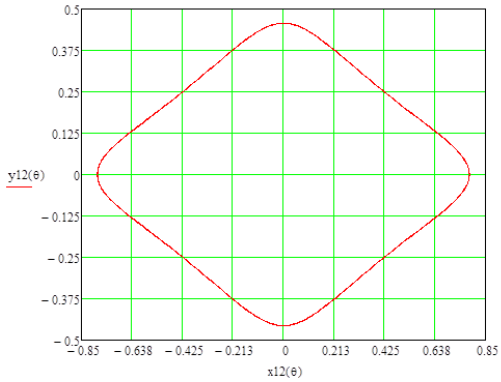


Рисунок 3.12 - Ромбовидное сечение туннеля

$$\omega 13(\rho,\theta) = R \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\zeta(\rho,\theta) - \frac{0.429}{\zeta(\rho,\theta)} + \frac{0.272}{\zeta(\rho,\theta)^2} + \frac{0.058}{\zeta(\rho,\theta)^3} + \frac{0.002}{\zeta(\rho,\theta)^5}\right)$$

$$x13(\theta) = Re(\omega 13(1,\theta) \qquad y13(\theta) = Im(\omega 13(1,\theta)$$

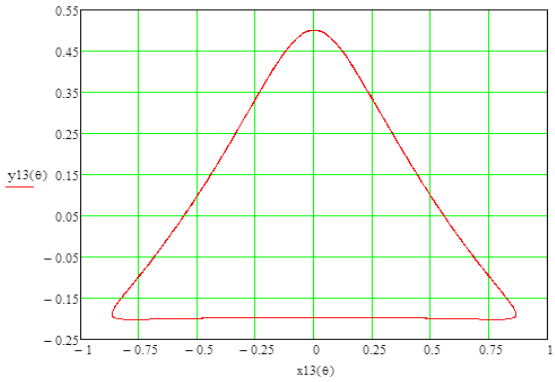


Рисунок 3.13 - Равнобедренное треугольное сечение туннеля

$$\omega 14(\rho,\theta) = R \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\zeta(\rho,\theta) - \frac{0.333}{\zeta(\rho,\theta)} + \frac{0.293}{\zeta(\rho,\theta)^2} - \frac{0.049}{\zeta(\rho,\theta)^3} + \frac{0.001}{\zeta(\rho,\theta)^5}\right)$$

$$x15(\theta) = Re(\omega 14(1,\theta) \qquad y14(\theta) = Im(\omega 14(1,\theta)$$

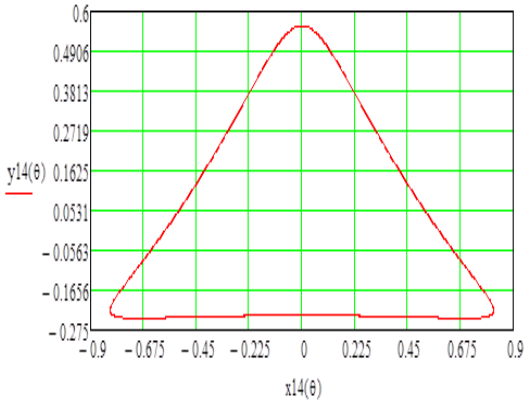


Рисунок 3.14 - Равнобедренное треугольное сечение туннеля, вершина имеет 90^0

$$\omega 15(\rho,\theta) = R \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\zeta(\rho,\theta) + \frac{0.25}{\zeta(\rho,\theta)^2} + \frac{0.002}{\zeta(\rho,\theta)^5}\right)$$

$$x15(\theta) = Re(\omega 15(1,\theta) \qquad y15(\theta) = Im(\omega 15(1,\theta)$$

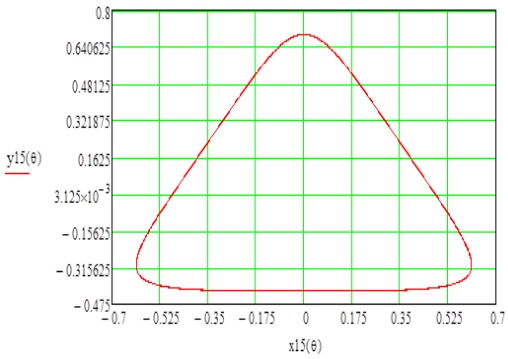


Рисунок 3.15 - Равностороннее треугольное сечение туннеля

$$\omega 16(\rho,\theta) = R \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\zeta(\rho,\theta) - \frac{0.3}{\zeta(\rho,\theta)}\right)$$

$$x16(\theta) = Re(\omega 16(1,\theta) \qquad y16(\theta) = Im(\omega 16(1,\theta)$$

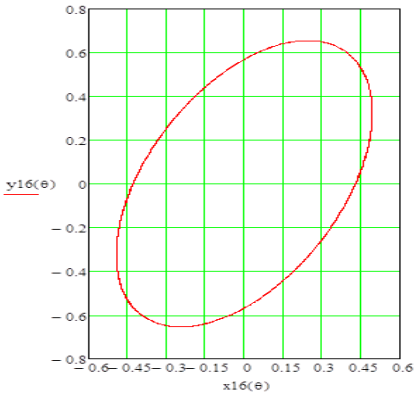


Рисунок 3.16 - Эллипсоидное сечение туннеля (наклон к горизонту 60^0)

$$\omega 17(\rho,\theta) = R \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\zeta(\rho,\theta) - \frac{0.95}{\zeta(\rho,\theta)}\right)$$

$$x17(\theta) = Re(\omega 17(1,\theta) \qquad y17(\theta) = Im(\omega 17(1,\theta)$$

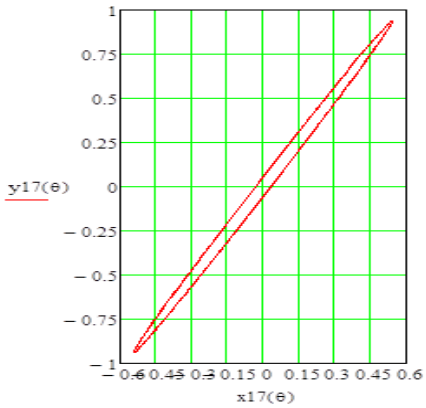
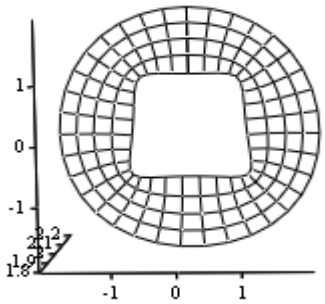


Рисунок 3.17 - Щелевидное сечение туннеля (наклон к горизонту 60^0)

Вторым признаком конформности отображений (3.2) является консервативность сохранения углов между двумя лучами в произвольной точке, как в области отображения, так и ее образа в другой области переменного.

Это обстоятельство покажем в №8 и №11 примерах отображений. Для этого в рамках программы MATHCAD предварительно создаем вектор для поверхности *Pov*.



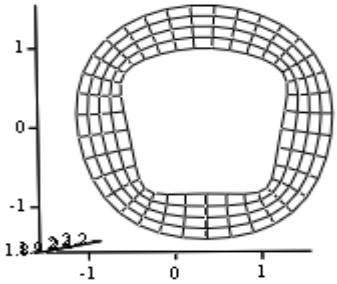


Рисунок. 3.18 - Ортогональная сетка для №8

Рисунок 3.19 - Ортогональная сетка для №11

Теперь в (3.2) положив $\delta = 0$, $\zeta = \rho \cdot e^{\iota\theta}$ разделим действительные части от мнимых,

$$x(\rho,\theta) + iy(\rho,\theta) = R \cdot \left(\zeta(\rho,\theta) + \frac{d_1}{\rho e^{i\theta}} + \frac{d_2}{\rho^2 e^{i\theta}} + \frac{d_3}{\rho^3 e^{i\theta}} + \frac{d_4}{\rho^4 e^{i\theta}} + \frac{d_5}{\rho^5 e^{i\theta}}\right)$$

Учитывая формулу Эйлера,

$e^{ik\theta} = \cos k\theta + i \sin k\theta$, $\quad e^{-ik\theta} = \cos k\theta - i \sin k\theta$; $\quad k = 1 \ldots 5$ будем иметь,

$$x(\rho,\theta) = R\left[\rho \cdot \cos\theta + \frac{d_1 \cos\theta}{\rho} + \frac{d_2 \cos 2\,\theta}{\rho^2} + \frac{d_3 \cos 3\,\theta}{\rho^3} + \frac{d_4 \cos 4\,\theta}{\rho^4} + \frac{d_5 \cos 5\,\theta}{\rho^5}\right]$$

$$y(\rho,\theta) = R\left[\rho \cdot \sin\theta - \frac{d_1 \sin\theta}{\rho} + \frac{d_2 \sin 2\,\theta}{\rho^2} + \frac{d_3 \sin 3\,\theta}{\rho^3} + \frac{d_4 \sin 4\,\theta}{\rho^4} + \frac{d_5 \sin 5\,\theta}{\rho^5}\right]$$

Производные от $x(\rho,\theta)$ и $y(\rho,\theta)$ от ее аргументов имеют вид:

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = R\left[\cos\theta - \frac{d_1 \cos\theta}{\rho^2} - \frac{2d_2 \cos 2\,\theta}{\rho^3} - \frac{3d_3 \cos 3\,\theta}{\rho^4} - \frac{4d_4 \cos 4\,\theta}{\rho^5} - \frac{5d_5 \cos 5\,\theta}{\rho^6}\right]$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = R\left[-\rho \cdot \sin\theta + \frac{d_1 \sin\theta}{\rho^1} - \frac{2d_2 \sin 2\theta}{\rho^2} - \frac{3d_3 \sin 3\theta}{\rho^3} - \frac{4d_4 \sin 4\theta}{\rho^4} - \frac{5d_5 \sin 5\theta}{\rho^5}\right]$$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = R\left[\sin\theta + \frac{d_1 \sin\theta}{\rho^2} + \frac{2d_2 \sin 2\,\theta}{\rho^3} + \frac{3d_3 \sin 3\,\theta}{\rho^4} + \frac{4d_4 \sin 4\,\theta}{\rho^5} + \frac{5d_5 \sin 5\,\theta}{\rho^6}\right]$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = R\left[\rho \cos\theta - \frac{d_1 \cos\theta}{\rho^1} - \frac{2d_2 \cos 2\,\theta}{\rho^2} - \frac{3d_3 \cos 3\,\theta}{\rho^3} - \frac{4d_4 \cos 4\,\theta}{\rho^4} - \frac{5d_5 \cos 5\,\theta}{\rho^5}\right]$$

Отсюда видно, что

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial y}{\partial \theta}; \qquad \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} = -\frac{\partial y}{\partial \rho}; \tag{3.2}$$

Равенства (3.2.1) называется условием Коши-Римана в полярных координатах и доказывает, что отображающая функция (3.2) является аналитической функцией. Следовательно, функция (3.2) непрерывна всюду по внешности единичного круга и дифференцируется сколько угодно раз при $|\zeta \geq 1.|$ Более того в окрестности произвольной точки ς_0 в плоскости $|\zeta \geq 1|$, первая из всех производных $|\omega'(\zeta) \neq 0|$ отлична от нуля. Равенства (3.2) о аналитичности функций (3.2) является основным третьим признаком конформности отображений №1 - №17.

При отображении типа (3.2) α угол между направлениями осей ох и касательной кривой ρ определяются формулой

$$e^{2i\alpha} = \zeta^2\omega'(\zeta)/\left(\rho^2\overline{\omega'(\zeta)}\right); \quad e^{-2i\alpha} = \overline{\zeta}^2\overline{\omega'(\zeta)}/(\rho^2\omega'(\zeta)) \qquad (3.3)$$

Преобразованная с помощью (3.2) и (3.3) в криволинейной системе координат компоненты напряжений принято обозначать $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \tau_{\rho\theta}$, из которых $\sigma_\rho(\rho,\theta)$ действует по направлению к нормали криволинейной дуги, а компонента $\tau_{\rho,\theta}(\rho,\theta)$ действует по направлении к касательной. На контурных точках туннеля имеет место:

$$N = \sigma_\rho(1,\theta); \qquad T = \tau_{\rho,\theta}(1,\theta); \qquad (3.4)$$

Граничные условия в (3.1) содержат две составляющие усилий (N, T) и ($N^н$, $T^н$). Составляющие (*N*, *T*) возникают от третьего поля напряжений $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \tau_{\rho\theta}$, в (2.1), а составляющие ($N^н$, $T^н$) от начального поля напряжений S_x, S_y, S_{xy}. Поэтому *N* и *T* принимаются равными по величине и противоположными с ($N^н$, $T^н$). Следовательно, сумма первых трех полей напряжений в (2.1) должна обеспечивать выполнение граничных условий (3.1). Распределение напряжений вокруг туннелей и подземных выработок необходимо для выбора месторасположения туннеля в массиве склона горы или размера и формы сечения горных выработок. За моделью массива вокруг туннеля принимается полубесконечная область с каким-либо отверстием. В точной форме постановки сумма первых трех полей напряжений в (1) должна удовлетворять граничным условиям на контурах полубесконечных области и контуре

отверстия, чтобы N = $T = 0$, т.е. контуры свободны от внешних нагрузок. На практике туннель или выработка размещается на определенной глубине массива, центр которого с координатами $(X_{0,}Y_0)$ расположен на расстоянии $R_0 \geq 5R$.

Здесь, R_0 – кратчайшее расстояние между контурами склона горы и контур отверстия.

В этом случае влиянием отверстия из-за удаленности можно пренебречь в зоне контура склона гор. Другими словами, пренебрегая влиянием туннеля на контуре полубесконечной области задача сводится к задаче односвязной области XOY имеющего отверстие какой-либо формы. Тогда начальное напряженное напряженное состояние в центре отверстия с координатами X_0, Y_0 определено величинами $S_x,\ S_y,\ S_{xy}$ в главе 2.

Теперь, для определения третьего поля напряжений $\sigma_x^m, \sigma_y^m, \tau_{xy}^m$ в (1) необходимо решить граничную задачу (3.1). Начало оси координат расположим в центре туннеля и используем преобразование (3.2), в котором отверстие отображается на внешности единичной окружности вспомогательной плоскости $\zeta = \rho \cdot e^{i\theta}$, $1 \leq \rho \leq \infty$.

Таким образом, поле напряжений от влияния возникновения в туннеле напряжений в массиве межгорной впадины $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \tau_{\rho\theta}$, где начальное напряженное состояние в точке возникновения туннеля характеризуется компонентами $S_x,\ S_y,\ S_{xy}$ и будет определено из граничных условий (3.1). Условие (3.1) в преобразованной плоскости новых переменных (3.2) и (3.3) принимают вид [68]:

$$[R\Gamma\sigma + \varphi(\sigma)] + \left[R\overline{\Gamma} + \overline{\varphi'(\sigma)}\right] \cdot \left[\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}\right] + \left[\overline{R\Gamma'\sigma} + \overline{\psi(\sigma)}\right] = 0;$$

$$\left[\overline{R\Gamma\sigma} + \overline{\varphi(\sigma)}\right] + [R\Gamma + \varphi'(\sigma)] \cdot \left[\overline{\omega(\sigma)}/\omega'(\sigma)\right] + [R\Gamma'\sigma + \psi(\sigma)] = 0; \qquad (3.5)$$

Здесь обозначено так же, как в работе [68]:

$$\Gamma = (S_x + S_y)/4; \qquad \Gamma' = (S_y - S_x + 2\,iS_{xy})\,/2\ ;$$

$$\overline{\Gamma'} = (S_y - S_x - 2\,iS_{xy})\,/2; \qquad (3.6)$$

Эти постоянные введены в [68] для обозначения однородного начального напряженного состояния S_x, S_y, S_{xy} в центре отверстия, где размещено начало оси координат нового вспомогательного переменного $\zeta = \rho e^{i\theta}$. Функции $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$ определены для внешности единичной окружности, где $\rho = 1$ контурные точки этой окружности обозначены $\zeta = \sigma = e^{i\theta}$ и $\overline{\zeta} = \overline{\sigma} = e^{-i\theta}$. Вдали от контурных точек $\zeta \to \infty$ эти функции стремятся нулю. Причем как показывает практика расчетов в подобных ситуациях при удалении от контура туннеля более чем на 10 R, влияние отверстия не более 1% на начальное напряженное состояние массива.

Интегралы типа Коши от заданных граничных условий (3.5) определяют искомые функций $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$ в зависимости от конкретной формы сечения туннеля. Ниже: когда в (3.2) *к = 1* моделирован туннель с круглым и эллиптическими сечениями (подраздел п 3.2); когда *к = 2* моделирован туннели с треугольным сечением (подраздел п 3.3); при *к = 3* рассмотрено туннели с овальным сечением (подраздел п 3.4); моделирование туннелей с трапециевидными сечениями *к = 4* дано в подразделе п 3.5; туннели сводчатой формы (*к - 5*) моделирован в подразделе п 3.6; выводы по главе 3 приведен в подразделе п 3.7. Роль δ – параметра (в радианах) для установления ориентации оси симметрии отверстия относительно горизонтальной оси показано на рис.3.17. только для моделировании трещины, хотя этот случай имеет самостоятельное значение в механике разрушения твердых тел.

3.2. Распределение напряжений вокруг туннеля с эллиптическим (круглым) поперечным сечением

В работах [37, 44] определено напряженное состояние вокруг туннелей, к которых заданы контуры отображающей функцией: $z = \omega(\zeta)$, где, $\zeta = \rho e^{i\omega}$,

$z(\rho, \theta) = x(\rho, \theta) + iy(\rho, \theta)$; при $\rho \geq 1$. Воспользуюсь [68, 74] за $\omega(\zeta)$ принято:

$$z = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right)e^{i\delta} \tag{3.7}$$

где, δ – угол между ох и направлением большой полуоси туннеля; $0 \leq m \leq 1$ безразмерный, постоянный.

Для туннеля с круглым сечением *m=0*, а для эллиптического поперечного большая полуось эллипса, *a=R(1+m)*, малая полуось *b=R(1-m)*; R-характерный, линейный размер поперечного сечения; *m=(a-b)/(a+b)*.

Использование функции CreateMesh среды MATHCAD [63] для построения трехмерных графиков позволяет, построить расчетную область *xy* приняв третью переменную $Z(\rho,\theta) = const = 0{,}2$. На рисунке 3.20 за горизонтальные координаты принято $x(\rho,\theta) = Re\,\omega\,(\zeta)$, а за вертикальные координаты точек принято $y(\rho,\theta) = Jm\omega(\zeta)$. Переменная ρ изменяется в пределах от 1 до 1,6 и этот отрезок разделена на 10 частей. Вторая переменная θ полярный угол изменяется от 0 до 2π и разделена на 36 частей. Полученная сетка в полярных координатах ρ,θ в области xoy представляют криволинейную ортогональную сетку, которая изображено на рис. 3.20.

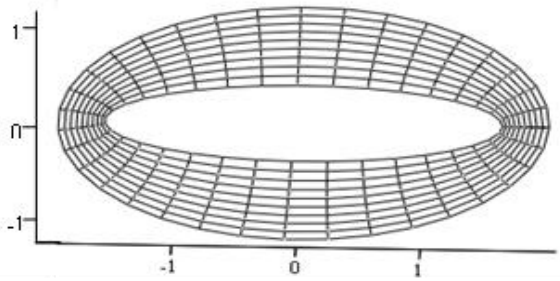


Рисунок 3.20 - Расчетная схема для туннеля с эллиптическим сечением

Согласно [40, 71] напряженное состояние вокруг туннеля состоит из трех слагаемых: начального состояния (S_x, S_y, S_{xy}) воображаемого поперечного сечения туннеля; $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \tau_{\rho\theta}$ - поле напряжений, которое возникает от образования туннеля (отверстия); Константы для граничных условий от начального состояния:

$$N1 = \frac{(S_x+S_y)\cdot R1}{2};\ \ \mathrm{N2} = \frac{(S_x-S_y-2\cdot i\cdot S_{xy})\cdot R1}{2};\ \ N3 = \frac{(S_x-S_y+2\cdot i\cdot S_{xy})\cdot R1}{2}; \tag{3.8}$$

Текст алгоритма расчета напряжений вокруг туннеля с эллиптическим сечением приводим в нотациях MATHCAD [3, 63].

Для простоты начало координат для $\zeta = \rho e^{\iota\theta}$поместим в центре отверстия. Тогда из (3.2) при $d_1=m$ следует, что:

$$z(\sigma) = R(\sigma) = R\left[\sigma + \frac{m}{\sigma}\right] e^{i\delta} = \frac{R(\sigma^2+m)}{\sigma} e^{i\delta}; \tag{3.9}$$

$$\omega'(\sigma) = R\left[1 - \frac{m}{\sigma^2}\right] e^{\delta} = \frac{R(\sigma^2-m)}{\sigma^2} e^{i\delta} \tag{3.10}$$

$$\overline{\omega(\sigma)} = R\left[\frac{1}{\sigma} + m\sigma\right] e^{-\,i\delta} = \frac{R(1+m\sigma^2)e^{-i\delta}}{\sigma}; \tag{3.11}$$

$$\overline{\omega'(\sigma)} = R[1 - m\sigma^2]e^{-i\delta} \tag{3.12}$$

Следовательно, для отношений $\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}$ и $\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}$ имеем:

$$\frac{R(\sigma^2+m)e^{i\delta}}{\sigma} \cdot \frac{1}{R\cdot(1-m\sigma^2)e^{-i\delta}} = \frac{e^{2i\delta}}{\sigma} \cdot \frac{\sigma^2+m}{1-m\sigma^2} \tag{3.13}$$

$$\frac{R(1+m\sigma^2)e^{-i\delta}}{\sigma} \cdot \frac{\sigma^2}{R\cdot(\sigma^2-m)e^{i\delta}} = \frac{(1+m\sigma^2)\sigma e^{-2i\delta}}{\sigma^2-m}; \tag{3.14}$$

Для учета начального напряженного состояния S_x, S_y, S_{xy} искомые функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ в (3.13) представим в виде сумм:

$$\varphi(\zeta) = \varphi_0(\zeta) + \Gamma R\zeta$$

$$\varphi(\zeta) = \psi_0 + \Gamma' R\zeta \tag{3.15}$$

где, постоянные Γ и Γ' выбирается так, чтобы учитывалась начальные напряженные состояние, т.е.

$$\begin{aligned} S_x &= \sigma_x^{\mathrm{p}}(x_{0,}y_0) + \sigma_y^p(x_0, y_0) \\ S_y &= \sigma_y^p(x_0, y_0) + \sigma_y^r(x_0, y_0) \\ S_{xy} &= \tau_{xy}^p(x_0, y_0) + \tau_{xy}^p(x_0, y_0) \end{aligned} \tag{3.16}$$

Слагаемые, $\varphi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ в (3.14) характеризует влиянии эллиптического отверстия $\sigma_\rho^r, \sigma_\theta^r, \tau_{r\theta}^r$ в (2.1). Остановимся на случай, что пока давление напора

Р на контур туннеля отсутствует, т.е. контур туннеля свободна от внешних нагрузок. В этом случае $X_n = Y_n = 0$ и граничные условие (3.1) принимает вид:

$$[\varphi_0(\sigma) + \Gamma R\sigma] + \frac{e^{2i\delta}}{\sigma} \cdot \frac{\sigma^2 + m}{[1 - m\sigma^2]} \left[\Gamma R + \overline{\varphi_0'(\sigma)}\right] + \left[\frac{\overline{\Gamma'} R}{\sigma} + \overline{\psi_0(\sigma)}\right] = 0$$

$$\left[\overline{\varphi_0(\sigma)} + \frac{\Gamma R}{\sigma}\right] + \frac{e^{-2i\delta} \cdot \sigma}{1} \left[\frac{1 + m\sigma^2}{\sigma^2 - m}\right] [\Gamma R + \varphi_0'(\sigma)] + [\Gamma' R\sigma + \psi_0(\sigma)] = 0 \qquad (3.17)$$

Разделим в (3.1) искомых функциях $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ и заданных известных напряжений S_x, S_y, S_{xy} соответственно в левую и правую части равенства:

$$\varphi_0(\sigma) + \frac{e^{2i\delta}}{\sigma} \cdot \frac{\sigma^2 + m}{1 - m\sigma^2} \overline{\varphi_0'(\sigma)} + \overline{\psi_0(\sigma)} = f_1(\sigma)$$

$$\overline{\varphi_0(\sigma)} + e^{-2i\delta} \frac{\sigma(1 + m\sigma^2)}{\sigma^2 - m} \varphi_0'\sigma + \psi_0(\sigma) = f_2(\sigma) \qquad (3.18)$$

где приняты обозначения:

$$f_1(\sigma) = -\Gamma R\sigma - \frac{e^{2i\delta}}{\sigma} \cdot \frac{\sigma^2 + m}{1 - m\sigma^2} \cdot \Gamma R - \frac{\overline{\Gamma' R}}{\sigma}$$

$$f_2(\sigma) = -\frac{\Gamma R}{\sigma} - \frac{e^{-2i\delta}(1 + m\sigma^2)\sigma}{\sigma^2 - m} \Gamma R - \Gamma' R\sigma \qquad (3.19)$$

Выражения $\varphi_0(\sigma)$ и $\psi_0(\sigma)$ являются граничными значениями функций $\varphi_0(\sigma)$ и $\psi_0(\sigma)$, которые голоморфны во внешности единичного круга $|\zeta| \geq 1$. Следовательно по определению выражения $\overline{\varphi_0(\sigma)}$ и $\overline{\psi_0(\sigma)}$ является граничными значениями функций $\overline{\varphi_0(\zeta)}$ и $\overline{\psi_0(\zeta)}$. Эти функции голоморфны во внутренности единичного круга $|\zeta| \leq 1$.

Функции $\varphi_0(\sigma)$ и $\psi_0(\sigma)$ голоморфные на внешности $|\zeta| \geq 1$ представляются в виде рядов:

$$\varphi_0(\zeta) = \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \frac{a_3}{\zeta^3} + \cdots \frac{a_n}{\zeta^n} \cdot \psi_0(\zeta) = \frac{a_1'}{\zeta} + \frac{a_2'}{\zeta^2} + \frac{a_3'}{\zeta^3} + \cdots$$

$$\varphi_0'(\zeta) = -\frac{a_1}{\zeta^2} - \frac{2a_2}{\zeta^3} - \frac{3a_3}{\zeta^4}; \qquad (3.20)$$

Которые стремится к нулю при $|\zeta| \to \infty$. Граничные значения (3.20) имеют вид:

$$\varphi_0(\sigma) = a_1\sigma^{-1} + a_2\sigma^{-2} + a_3\sigma^{-3} + \cdots$$

$$\varphi_0'(\sigma) = -a_1\sigma^{-2} - 2a_2\sigma^{-3} - 3a_3\sigma^4 + \cdots$$

$$\psi_0(\sigma) = a_1'\sigma^{-1} + a_2'\sigma^{-2} + a_3'\sigma^{-3}; \quad (\zeta = \rho e^{i\theta}) = \rho\sigma \tag{3.21}$$

Выражения $\overline{\varphi_0(\sigma)}$ и $\varphi'(\sigma)$ являющихся граничными значениями функций $\overline{\varphi_0(\sigma)}$ и $\varphi'(\sigma)$ представляются:

$$\overline{\varphi_0(\zeta)} = \frac{\overline{a_1}}{\bar{\zeta}} + \frac{\overline{a_2}}{\overline{\zeta^2}} + \frac{\overline{a_3}}{\overline{\zeta^3}} + \cdots$$

при $\rho = 1\ e^{-i\theta} = \sigma^{-1}$;

$$\overline{\varphi_0(\sigma)} = \overline{a_1}\sigma + \overline{a_2}\sigma^2 + \overline{a_3}\sigma^3 + \cdots$$

$$\overline{\varphi_0'(\sigma)} = \overline{-a_1}\sigma^2 - \overline{2a_2}\sigma^3 + \overline{3a_3}\sigma^4 + \cdots$$

$$\overline{\psi_0}(\sigma) = \overline{a_1'}\sigma + \overline{a_2'}\sigma^2 + \overline{a_3}\sigma^3 + \cdots \tag{3.22}$$

Заметим, что выражения в (3.18)

$$\frac{e^{i\delta}(\sigma^2+m)}{\sigma(1-m\sigma^2)}\overline{\varphi_0'(\sigma)} \tag{3.23}$$

являются граничным значением функции

$$\frac{e^{2i\delta}(\zeta^2+m)}{\zeta(1-m\zeta^2)}[\overline{-a_1}\zeta^2 - 2\overline{a_2}\zeta^3 - 3\overline{a_0}\zeta^4 - \cdots]$$

Который, непрерывно всюду внутри единичной окружности $|\zeta| \leq 1$. Возможные полюсы этой функции при F, $1 - m\zeta^2 = 0$ указывают, что

$\zeta_1 = \sqrt{\frac{1}{m}}$; $\zeta_2 = -\sqrt{\frac{1}{m}}$ являются точками принадлежащие во внешности единичного круга, т.к. $|m| < 1$; $|\zeta_1| > 1$; $|\zeta_2| > 1$. Следовательно, это выражение целиком определена для внутренности единичного круга, где разлагается непрерывной ряд по положительным степеням $\zeta^{\text{к}}$, к $= 1,2,3 \ldots$).

Третьей слагаемый $\overline{\psi(\sigma)}$ в (3.18) определена для внутренности единичного круга $|\zeta| \leq 1$. Второй слагаемый в функции $f_1(\sigma)$ равно:

$$\frac{e^{2i\delta}}{\sigma} \cdot \frac{\sigma^2+m}{1-m\sigma^2}\Gamma R$$

Имеет возможные полюсы в трех точках, $\zeta_1 = 0$, $\zeta_2\sqrt{\frac{1}{m}}$ и $\zeta_3 = -\sqrt{\frac{1}{m}}$. поскольку $m \leq 1$ модули $|\zeta_2| > 1, |\zeta_3| > 1$. По этой причине только первая

точка $\zeta_1 = 0$ является полюсами этого выражения. Следовательно, это выражения является голоморфным значением функции

$$\frac{e^{2i\delta}}{\sigma} \cdot \frac{\zeta^2+m}{1-m\zeta^2}\Gamma R \text{ внутри единичной окружности.}$$

Третьей слагаемый $-\frac{\Gamma' R}{\sigma}$ голоморфна внешности единичной окружности.

Умножим обе части первого уравнения (3.18) и (3.19) на ядра Коши $(2\pi i)^{-1}(\sigma-\zeta)^{-1}d\sigma$ и проинтегрируем полученных интегралов типа Коши для внешности единичного круга $|\zeta| \geq 1$. На основании формул (1.2, $1', 2'$) [92] будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi_0(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = -\varphi_0(\zeta); \quad \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{e^{2i\delta}}{\sigma}\cdot\frac{\sigma^2+m}{1-m\sigma^2}\right]\overline{\varphi_0'(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = 0$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\psi_0(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = 0; \quad \frac{1}{2\pi i}\int_L [-R\Gamma\sigma]\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = 0;$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \left\{-\frac{e^{2i\delta}}{\sigma}\cdot\frac{\sigma^2+m}{1-m\sigma^2}\right\}\frac{d\sigma^2}{\sigma-\zeta} = \frac{me^{2i\delta}\Gamma R}{\zeta}; \ \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[-\frac{\overline{\Gamma'}R}{\sigma}\right]\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = \frac{\overline{\Gamma' R}}{\zeta};$$

Следовательно, из первого равенства (3.18) следует, что

$$\varphi_0(\zeta) = \frac{-1}{\zeta}\left[mN_1e^{2i\delta} + N_2\right] \tag{3.24}$$

Отсюда производная по ζ

$$\varphi_0'(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2}\left[mN_1e^{2i\delta} + N_2\right] \tag{3.25}$$

Во втором уравнении (3.18) $\overline{\varphi_0(\sigma)}$ голоморфно внутри единичной окружности $|\zeta| \leq 1$. Вторая слагаемая

$$\frac{e^{-2i\delta}\sigma(1+m\sigma^2)}{\sigma^2-m}\varphi'(\sigma)$$

Голоморфна внешности единичного круга, т.к. возможные полюсы имеет место $\zeta = \sqrt{m}$ и $\zeta_0 = -\sqrt{m}$.

Поскольку $|m| \leq 1$, то модули $|\zeta_1| \leq 1$, $|\zeta_2| \leq 1$.

Отсюда следует, что эта выражения голоморфна всюду $|\zeta| > 1$ и не имеет полюса.

Третья слагаемая $\psi_0(\sigma)$ голоморфна на внешности $|\zeta| > 1$ единичного круга. В первой части выражения $-\frac{\Gamma R}{\sigma}$ является граничным значением выражения $-\frac{\Gamma R}{\zeta}$. Вторая слагаемая $f_2(\sigma)$ в (3.19)

$$-\frac{e^{-2i\delta}(1+m\sigma^2)\sigma}{\sigma^2-m}\Gamma R, \quad -e^{-2i\delta}\frac{1+m\zeta^2)\zeta}{\zeta^2-m}\Gamma R$$

которая голоморфна внешности круга $|\zeta| \geq 0$, кроме точки на бесконечности, где имеет полюс $-e^{2i\delta}m\zeta\Gamma R$. Выражение $[-\Gamma' R\sigma]$, последняя слагаемая (2.19), является граничным значением $[-R\Gamma'\zeta]$ голоморфная внутри единичной окружности $|\zeta| \leq 1$.

Теперь и второе уравнению в (3.18) умножаем на ядро Коши и проинтегрируем эту граничную условию, предположив $|\zeta| \geq 1$.

Первый интегралы второго равенства (3.18) равны

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi_0(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = 0. \quad \frac{1}{2\pi i}\int_L \psi_0(\sigma)\frac{\sigma}{\sigma-\zeta} = -\psi_0(\zeta)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \left\{e^{-2i\delta} - \frac{(1+m\sigma^2)}{\sigma^2-m}\varphi_0'(\sigma)\right\}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = -\frac{e^{-2i\delta}\zeta(1+m\zeta^2)}{\zeta^2-m}\varphi_0'(\zeta);$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \left[-\frac{\Gamma R}{\sigma}\right]\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = \frac{\Gamma R}{\zeta}; \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_L [-\Gamma' R\sigma]\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = 0$$

$$\int_L \left[-\frac{e^{-2i\delta}(1+m\sigma^2)\sigma\Gamma R}{\sigma^2-m}\right]\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = \Gamma R e^{-2i\delta}\left[\frac{\zeta(1+m\zeta^2}{\zeta^2-m} - m\zeta\right] =$$

$$= \Gamma R e^{-2i\delta}\frac{(1+m^2)\zeta}{\zeta^2-m};$$

Отсюда вместо второго уравнения (3.18) будем иметь:

$$\psi_0(\varsigma) = -\frac{e^{2i\delta}\zeta(1+m\zeta^2)}{\zeta^2-m}; \;\; \varphi_0'(\zeta) = \frac{R\Gamma}{\zeta} - \Gamma R e^{-2i\delta}\frac{(1+m^2)\zeta}{\zeta^2-m}; \qquad (3.26)$$

Таким образом поле напряжений, обусловленное образованием туннеля с эллиптическим сечением найдено.

Для контурных точек вокруг щели

$\rho = 1, k = 0,1 \dots 37,\ a\sigma_{k,0} = \sigma_\rho(1,k), a\sigma_{k,1} = \sigma_\theta(1,k), \quad a\sigma_{k,2} = \tau_{\rho\theta}(1,k).$

Таблица 3.1 - Вычисления напряжений для эллипсоидной щели

№	σ_ρ *(МПа)*	σ_θ *(МПа)*	$\tau_{\rho\theta}$ *(МПа)*
0	$9.379 \cdot 10^{-13}$	-647.204	$8.91 \cdot 10^{-12}$
1	$2.132 \cdot 10^{-14}$	-67.695	$7.105 \cdot 10^{-15}$
2	$7.105 \cdot 10^{-15}$	-202.571	$-7.105 \cdot 10^{-15}$
3	$5.542 \cdot 10^{-13}$	965.559	$1.279 \cdot 10^{-13}$
4	$7.105 \cdot 10^{-15}$	-41.027	$3.553 \cdot 10^{-13}$
5	$1.776 \cdot 10^{-14}$	-182.517	$1.421 \cdot 10^{-14}$
6	$1.99 \cdot 10^{-13}$	-571.206	$5.258 \cdot 10^{-14}$
7	0.0	-7.196	$1.421 \cdot 10^{-14}$
8	$1.066 \cdot 10^{-14}$	-164.136	$-7.105 \cdot 10^{-15}$
9	0.0	-421.034	$3.553 \cdot 10^{-13}$
10	$8.527 \cdot 10^{-14}$	39.184	$9.948 \cdot 10^{-14}$

На контурных точках перпендикулярная σ_ρ и $\tau_{\rho\theta}$ касательная составляющие напряжений близки нулю во всех контурных точках отверстия. Погрешность не более 10 минус 13 степени. Тестовые расчеты напряжений вокруг туннеля с эллиптическим и круговыми сечениями:

- Тест 1. Одноосное горизонтальное растяжение - сжатие.
- Тесть 2. Одноосное вертикальное растяжение - сжатие.
- Тесть 3. Чистый сдвиг.
- Тест 4. Круглое сечение туннеля.

В научной литературе эти случаи исследованы наиболее детально и поэтому нами рассмотрены как тестовые расчеты.

$$\Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}; \quad \psi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)};$$

$$\Phi'(\zeta) = \frac{\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta)}{\omega'(\zeta)^2}$$

Известные в [68] соотношения для вычисления компонентов напряжений в криволинейных координатах $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \tau_{\rho,\theta}$:

$$\sigma_\rho + \sigma_\theta = 4Re\Phi(\zeta);$$

$$\sigma_\rho + \sigma_\theta + 2i\tau_\rho = 2\frac{\left(\rho e^{i\theta}\right)^2}{\rho^2} \cdot \frac{1}{\overline{\omega'(\rho,\theta)}}\{\omega'(\zeta)\phi'(\zeta) + \psi'(\zeta)\}.$$

Положив в (2.15) $S_x, S_y,\ S_{xy},$ вычислены распределения напряжений $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \tau_{\rho,\theta},$ которые возникают на контуре вокруг круглого и эллиптического туннеля только от горизонтального, вертикального сжатия и при чистом сдвиге.

Таблица 3.2 - Контурные напряжения вокруг круглого туннеля от горизонтального сжатия $S_x = -1, S_y = 0,\ S_{xy} = 0,$ и $P = 0.$

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
θ	0	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
σ_ρ (МПа)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
σ_θ (МПа)	1	1	0.879	0.532	0	- 0.653	-1.347	-2	-2.532	-2.879	-3
$\tau_{\rho,\theta}$ (МПа)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 3.3 - Контурные напряжения вокруг круглого туннеля от вертикального сжатия $S_x = 0, S_y = -1,\ S_{xy} = 0,$ и $P = 0$ в (МПа)

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
θ	0	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
σ_ρ (МПа)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
σ_θ (МПа)	-3	3	0.879	0.532	-2	1.347	0.653	0	0.532	0.879	1
$\tau_{\rho,\theta}$ (МПа)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 3.4 - Контурные напряжения вокруг круглого туннеля при чистом сдвиге $S_x = 0, S_y = 0,\ S_{xy} = -1,$ и $P = 0.$

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
θ	0	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
σ_ρ (МПа)	0	0	0	0	0	0	0	$1.15 \cdot 10^{-15}$	0	0	0
σ_θ (МПа)	0	0	1.368	2.571	3.464	3.939	3.939	3.464	2.571	1.368	0
$\tau_{\rho,\theta}$ (МПа)	0	0	0	$1.11 \cdot 10^{-15}$	0	$1.193 \cdot 10^{-15}$	0	0	0	0	0

Как видно из таблицы 3.1-3.4 точность выполнения граничных условий (3.1) весьма высока. Производные от функций $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$ имеют вид:

$$\Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)};$$

$$\psi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)};$$

$$\Phi'(\zeta) = \frac{\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta)}{\omega'(\zeta)^2};.$$

При этом компоненты напряжений в криволинейных координатах выражаются известными в [68] соотношениями:

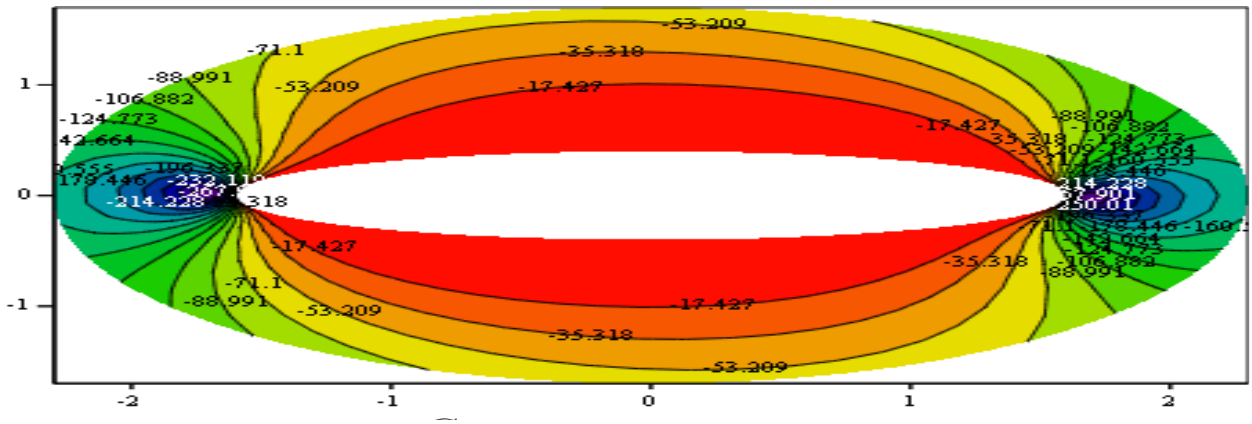
$$\sigma_\rho + \sigma_\theta = 4Re\,\Phi(\zeta); \tag{3.27}$$

$$\sigma_\theta - \sigma_\rho + 2i\tau_\rho = 2\frac{(\rho\ell^{i\theta})^2}{\rho^2} \cdot \frac{1}{\overline{\omega'(\rho,\theta)}}\left\{\overline{\omega(\zeta)}\varphi'(\zeta) + \psi'(\zeta)\right\}$$

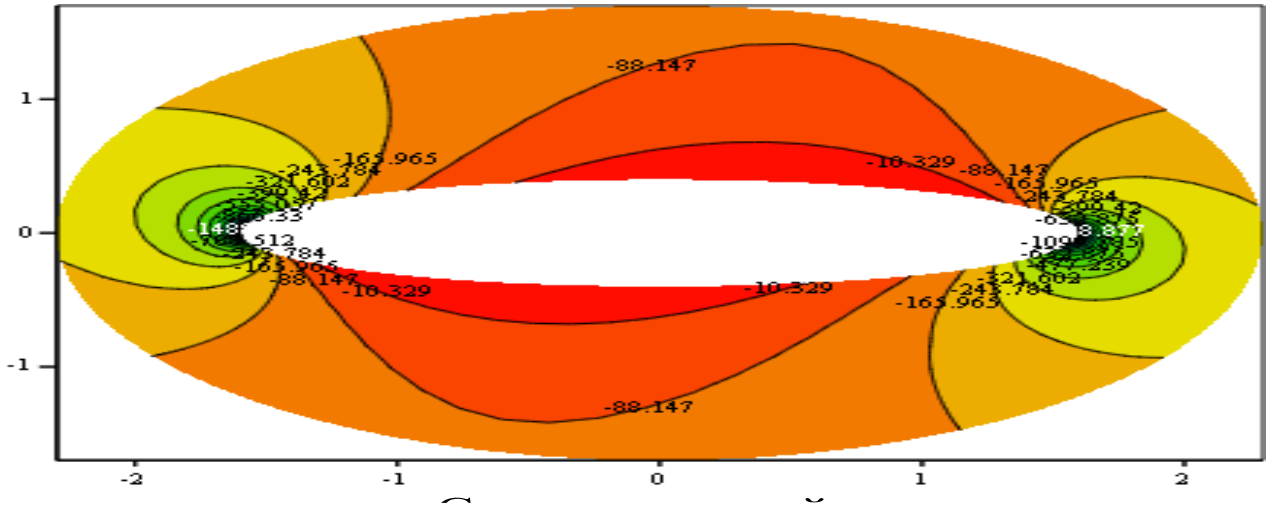
На рисунке 3.21 представлены распределения напряжений вокруг эллиптического туннеля, когда оно возникает при отсутствии напора воды $P = 0$ и следующих значениях начального напряженного состояния:

$$S_x = -9 МПа,\ S_y = -20\ МПа,\ S_{xy} = -6\ МПа$$

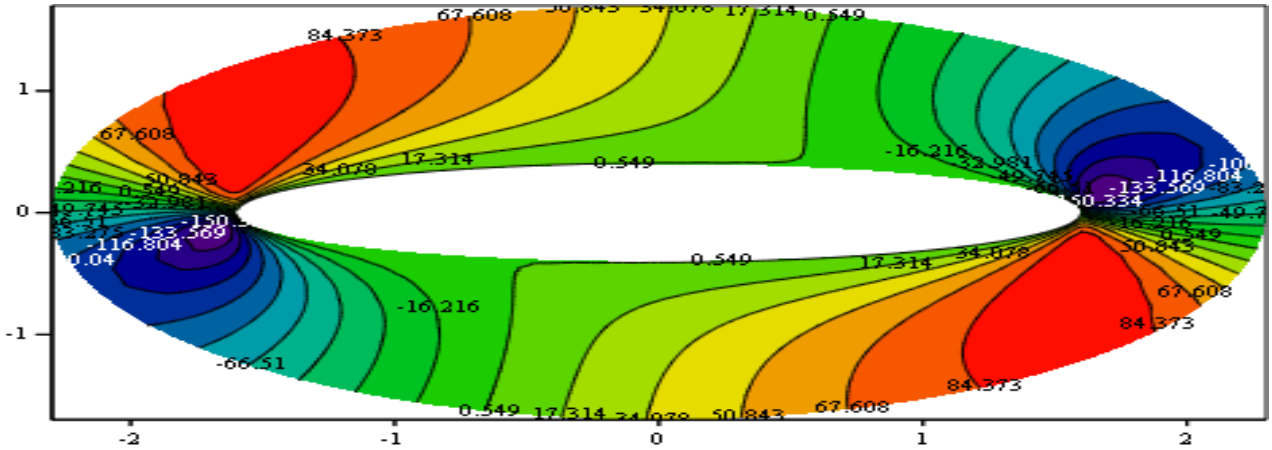
Когда туннель имеет круглое сечение, положив $m = 0$ в построенную аналитическую модель для функций $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$, и с тем же начальным состоянием массива в рис. 3.21 построенные изолинии представлены на рис. 3.22.



σ_ρ



σ_θ



$\tau_{\rho\theta}$

Рисунок 3.21 - Распределение напряжений вокруг туннеля с эллиптическим сечением (МПа)

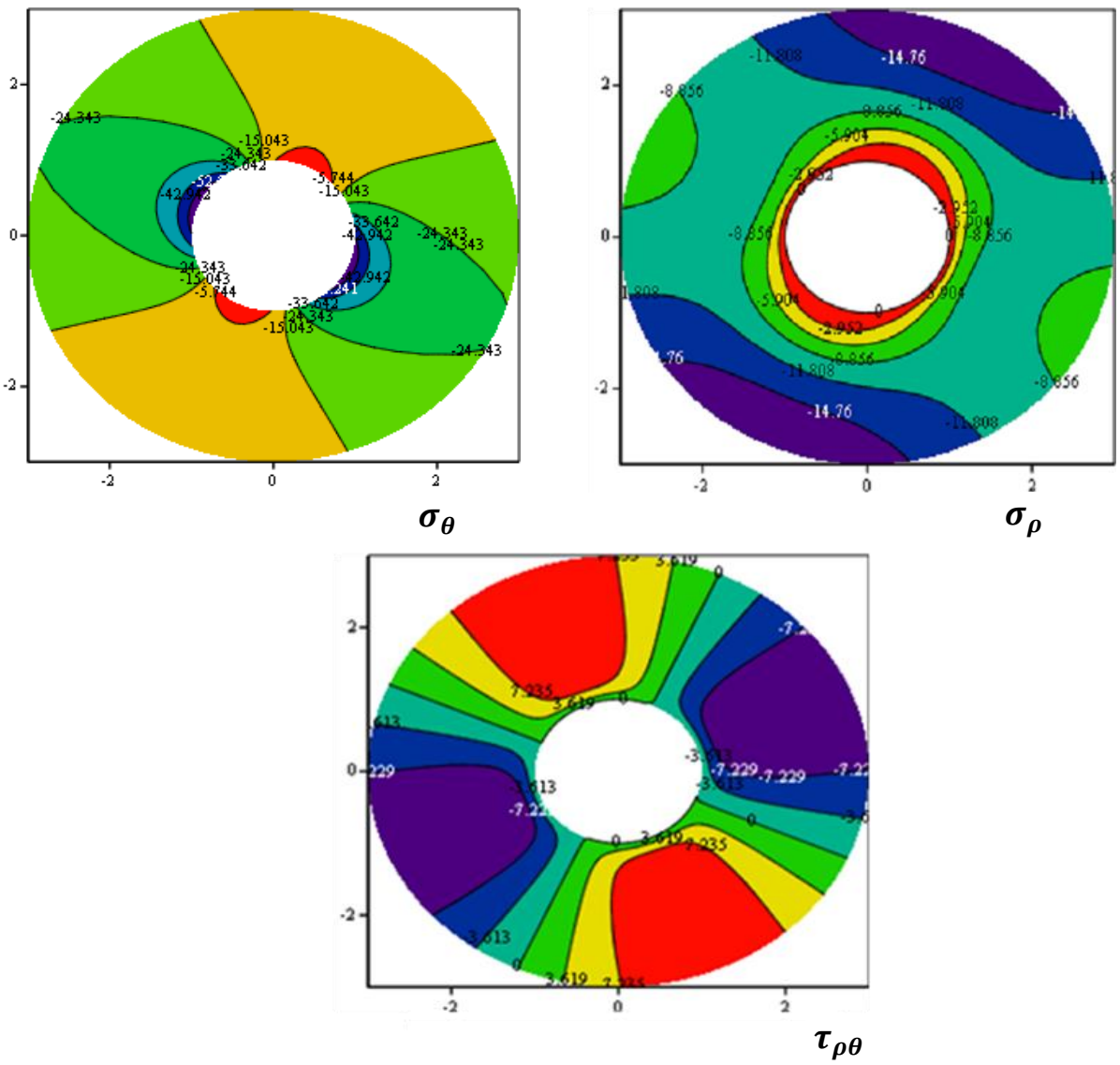


Рисунок 3.22 - Распределение напряжений вокруг туннели с круговыми сечениями (МПа)

3.3. Распределение напряжений вокруг туннеля с треугольным поперечным сечением

Количественные значения компонента напряжений начального напряженного состояния в зоне основании склона одиночной горы с максимальной высотой 300 метров равны (см. глава 2):

$$S_x = -30МПа,\ \ S_y = -8\ МПа,\ S_{xy} = -9МПа.$$

Влияние туннеля на распределение начального напряженного состояния массива устанавливается путем решения граничной задачи для плоскости *xoy* с

треугольным отверстием, форма которого моделируется с помощью отображающей функции:

$$\omega(\zeta) = e^{i\delta} R[\zeta + \omega_0(\zeta)]; \quad \omega_0(\zeta) = \frac{d_1}{\zeta} + \frac{d_1}{\zeta^2}; \tag{3.28}$$

Здесь, $0 \le \rho \le \infty$ ось положительных чисел; $0 \le \theta \le 2\pi$ - в радианах.

R – коэффициент масштаба отверстия; δ – параметр (в радианах) для задания ориентации отверстия относительно горизонтальной оси;

Вариация постоянных d_1 и d_2 позволяет рассматривать разные треугольные сечения туннелей (см. рисунок 3. 23).

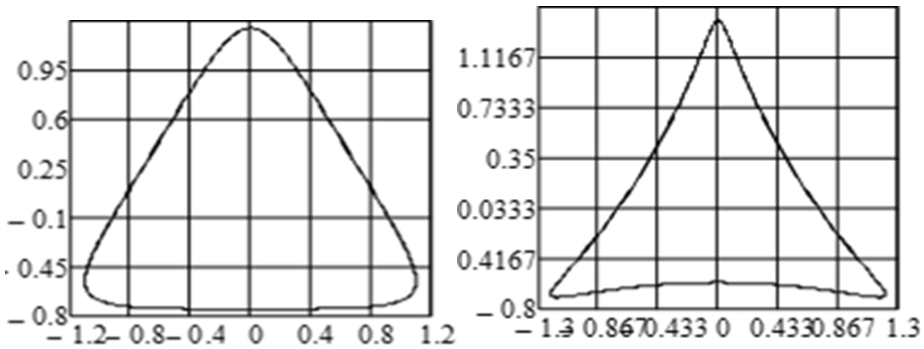


Рисунок 3.23 - Формы сечений туннелей с треугольным сечением

Отношения $\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}$ и $\overline{\omega(\sigma)}/\omega'(\sigma)$ разлагаются на простые выражения:

$$\overline{\omega(\sigma)}/\omega'(\sigma) = e^{-2i\delta}[b_2\sigma^2 + b_1\sigma^1 + b_0 + f_1];$$

$$f_1(\sigma) = [q_2\sigma^2 + q_1\sigma + q_0]/[\sigma^3 - d_1\,\sigma - 2\,d_2]$$

$$\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)} = e^{2i\delta}[b_2/\sigma^2 + b_1/\sigma + b_0 + f_2]$$

$$f_2(\sigma) = [q_2\sigma^3 + q_1\sigma^2 + q_0\sigma]/[1 - d_1\,\sigma^2 - 2\,d_2\,\sigma^3]$$

$$b_2=d_2;\ b_1=d_1;\ b_0= d_1d_2;\ q_0=2d_1d_2^2;\ q_1=2d_2b_1+d_1^2;\ q_2=1+2d_2b_2+d_1b_1;$$

Интегралы типа Коши от заданных граничных условий (3.5) определяют искомые функции $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$. Формулы для граничных условий (3.5) с учетом (3.27) обозначим:

$$N_1 = Re^{i\delta}(S_x + S_y)\,/4;\ N_2 = Re^{-i\delta}(S_y - S_x + 2i\,S_{xy})\,/2;\ N_3 = \overline{N_1};\quad N_4 = \overline{N_2};$$

$$a_{01}=-N_1d_1- N_3;\ a_{02}=-N_1d_2;\ b_{01}=-N_4d_1- N_2;\ b_{02}=-N_4d_2;\ sb_1= b_{01}+ b_{11};$$

Вычисленные интегралы типа Коши от граничных условий в (3.5) имеют вид:

$$\varphi(\zeta) = A_0(\varsigma);\ \varphi'(\zeta)\cdot[\overline{\omega}(\zeta)/\omega'(\zeta)] + \psi(\zeta) = B_0(\zeta); \tag{3.29}$$

$$A_0(\zeta) = \sum_{k=1}^{2} C_k\zeta^{-k}; \qquad B_0(\zeta) = \sum_{k=1}^{2\hbar} sb_k\zeta^{-k};$$

Для разложений в отношениях $\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}$ и $\overline{\omega(\sigma)}/\omega'(\sigma)$ введены новые обозначения:

$bp0=b_0e^{2i\delta}$; $bp1=b_1e^{2i\delta}$; $bp2=b_2e^{2i\delta}$; $qp0=q_0e^{-2i\delta}$; $qp1=q_1e^{-2i\delta}$;$qp2=q_2e^{-2i\delta}$;

Соотношения для функций;

$$R_0(\zeta) = r_1/\zeta^{-1}; Q(\zeta) = \left(\sum_{k=0}^{2} q_k\zeta^k\right); \qquad f(\zeta) = (b_1\,\zeta + b_0 + Q(\zeta)/\omega\, d(\zeta));$$

$$\omega\, d(\zeta) = \zeta^3 - d_1\zeta - 2d_2;$$

$$\psi(\zeta) = B_0(\zeta) + R_0(\zeta) - f(\zeta)\varphi'(\zeta);\ \ r_1 = 2C_2b_2;\ \ \Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)};$$

$$\Psi(\zeta) = \psi'(\zeta)/\omega'(\zeta); \Phi'(\zeta) = (\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta))/\omega'(\zeta)^2.$$

Сумма первых трех полей напряжений в системе криволинейных координат, где для контурных точек туннеля при $\rho = 1$, представлены в табл. 3.4 для каждого компонента напряжений.

Таблица 3.4 - Напряжения в контурных точках туннеля с треугольным поперечным сечением

$\sigma_\rho(1,\theta)$ (МПа)	$\sigma_\theta(1,\theta)$ (МПа)	$\tau_\rho(1,\theta)$ (МПа)
$-1.776\cdot10^{-15}$	- 202	$-2.132\cdot10^{-14}$
$3.126\cdot10^{-13}$	- 203.241	$8.971\cdot10^{-14}$
$-1.954\cdot10^{-14}$	- 165.686	$-3.997\cdot10^{-14}$
$-4.441\cdot10^{-14}$	- 125.28	$7.105\cdot10^{-15}$
$1.066\cdot10^{-14}$	- 94.439	$8.882\cdot10^{-15}$
$1.421\cdot10^{-14}$	- 72.669	0
$1.954\cdot10^{-14}$	- 57.299	$1.066\cdot10^{-14}$
$-1.243\cdot10^{-14}$	- 46.182	0
$3.553\cdot10^{-15}$	- 37.892	$-3.553\cdot10^{-15}$
$-1.421\cdot10^{-14}$	- 31.512	$-5.329\cdot10^{-15}$

Результаты полученных исследований представлены на рис. 3.24. для треугольных сечений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$.

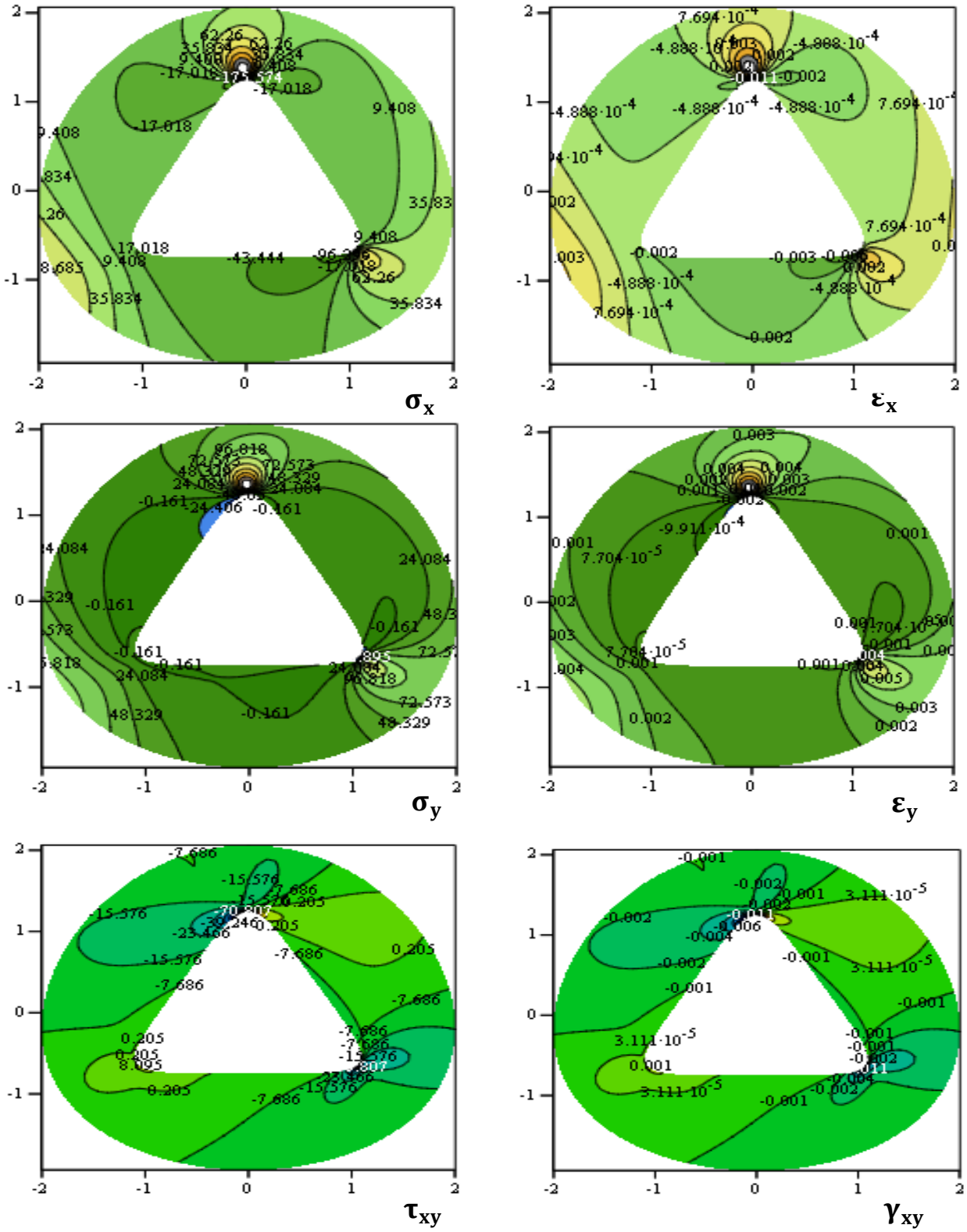


Рисунок 3.24 - Изменение напряжений и относительных деформаций вокруг туннеля с треугольным сечением (МПа)

В рамках закона Гука [68] были вычислены компоненты напряжений и относительных деформаций при значении модуля Юнга $E = 1{,}71 \cdot 10^4$ *МПа* и коэффициента Пуассона $\nu = 0{,}3$.

3.4. Распределение напряжений вокруг туннеля с овальным поперечным сечением

Для определения третьего поля напряжений в (2.1) используем отображения внешности овального отверстия на внешность единичного

$$z = \omega(\zeta); z = x + \iota \cdot y; \quad \zeta = \rho e^{i\theta}; i = \sqrt{-1};$$

$$\omega(\zeta) = e^{i\delta} R[\zeta + \omega_0(\zeta)]; \quad \omega_0(\zeta) = \sum_{k=1}^{3} \frac{d_k}{\zeta^k}; \qquad (3.30)$$

Здесь $0 \le \rho \le \infty$ ось положительных чисел; $0 \le \theta \le 2\pi$- полярный угол.

Вариация параметров отображающей функции d_1, d_2, d_3 допускает моделирование различных форм сечений туннелей (см. табл. 3.5).

Таблица 3.5 - Константы отображающей функции (3.29)

№	d_1	d_2	d_3	δ
x_1—y_1	0,4706	0	-0.0588	0
x_2—y_2	0,3012	0	-0,0494	0

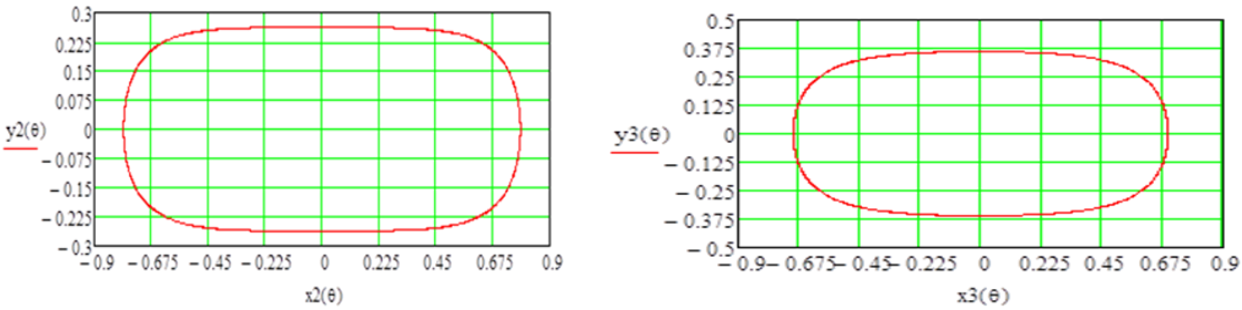


Рисунок. 3.25 – Форма сечений туннелей с овальным сечением

Граничные значения функций $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$ представляются в виде:

$$\varphi(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k \sigma^{-k}; \psi(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k \sigma^{-k}; \varphi'(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} -kR_k \sigma^{-k-1};$$

Отношения $\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}$ и $\overline{\omega(\sigma)}/\omega'(\sigma)$ разлагаются на простые выражения (полином +правильная дробь):

$$\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} = e^{-2i\delta}[b_3\sigma^3 + b_2\sigma^2 + b_1\sigma^1 + b_0 + f_1];$$

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} = e^{-2i\delta}[b_3/\sigma^3 + b_2/\sigma^2 + b_1/\sigma^1 + b_0 + f_2];$$

$$f_1(\sigma) = [q_3\sigma^3 + q_2\sigma^2 + q_1\sigma^1 + q_0]/[\sigma^4 - d_1\,\sigma^2 - 2\,d_2\,\sigma - 3\,d_3]\,;$$

$$f_2(\sigma) = [q_3\sigma + q_2\sigma^2 + q_1\sigma^3 + q_0\sigma^4]/[1 - d_1\,\sigma^2 - 2\,d_2\,\sigma^3 - 3\,d_3\,\sigma^4];$$

$$b_3=d_3;\ b_2=d_2;\ b_1=d_1+d_1d_3;\ b_0=2d_2b_3+\ d_1b_2;\ \ q_0=3\ d_3b_0;\ \ q_1=3\ d_3\ b1+2\ d_2b_0\,;\ \ \ q_2=3\ d_3b_2+2d_2b_1+\ d_1b_0;\ \ \ q_3=1+3d_3b_3+2d_2b_2+d_1b_1;$$

Интегралы типа Коши от граничных условий в (3.1) или (3.5) имеют вид:

$$\varphi(\zeta) + G(\,\zeta) = A_0(\,\varsigma);\ \ \varphi'(\zeta)\cdot[\overline{\omega}(\zeta)/\omega'(\zeta)] + \psi(\zeta) - \overline{G_0}; \qquad (3.31)$$

$$G(\zeta) = \left[b_3\overline{R}_1\right]e^{2i\delta}\zeta^{-1};\ A_0(\zeta) = \sum_{k=1}^{3} ca_k\zeta^{-k};\ B_0(\zeta) = \sum_{k=1}^{3} sb_k\zeta^{-k};$$

Для разложения в отношениях $\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}$ и $\overline{\omega(\sigma)}/\omega'(\sigma)$ вводим новые обозначения:

$$bp0=b_0e^{2i\delta};\ \ bp1=b_1e^{2i\delta};\qquad bp2=b_2e^{2i\delta};\qquad bp3=b_3e^{2i\delta};$$

$$qp0=q_0;\ qp1=q_1;\ qp2=q_2;\ qp3=q_3;$$

Первое уравнение (3.30) содержит полюс первого порядка от интеграла второго слагаемого граничного условия в (3.30). Пока их обозначим через $R_1, \overline{R_1}$; для определения их значений, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменного ζ^{-1} правых и левых частей первого уравнения, будем иметь одно уравнение. Добавим к нему сопряженное уравнение и получим систему из двух уравнений.

Для выполнения расчетов начальное напряженное состояние принято, как:

$$S_x = -59\ МПа;\ \ S_y= -20\ МПа\ ;\ S_{xy}= -10\ МПа.$$

Коэффициенты системы имеют вид:

$$M_{0,0} = 1; M_{0,1} = 0; M_{0,1} = -bp_3; M_{1,0} = \overline{M_{0,1}}; M_{1,1} = \overline{M_{0,0}};$$

$$M0_0 = ca_1; M0_1 = \overline{ca_1};$$

Система уравнений решена методом векторной алгебры, которая в пакете программы MATHCAD [63] оформлена как простая вычисляемая функция. Результат решения системы выделено отдельно $MR = M^{-1}M0$;

$$\mathrm{MR} = \begin{pmatrix} 18.062 + 12.32\mathrm{i} \\ 18.062 - 12.32\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Первое уравнение после объединение коэффициентов при одинаковых степенях переменной $\zeta^{-k}(k = 1,2,3)$ принимает вид:

$$\varphi(\zeta) = C_1/\zeta^{-1} + C_2/\zeta^{-2} + C_3/\zeta^{-3};$$

где, $C_1 = ca1 + \gamma_1; C_2 = ca2; C_3 = ca3; \gamma_1 = b_3 MR_1 e^{2i\delta}.$

$$R_0(\zeta) = (r_1/\zeta^1 + r_2/\zeta^2)e^{-2i\delta}; r_1 = 3C_3\, b_3 + 2C_2\, b_2; r_2 = 3C_3\, b_2;$$

$$\omega\, d(\zeta) = (\zeta^4 - d_1\zeta^2 - 2d_2\zeta - 3d_3); \quad \omega'\, d(\zeta) = 4\zeta^3 - 2d_1\zeta - 2d_2;$$

$$Q(\zeta) = q_3\zeta^3 + q_2\zeta^2 + q_1\zeta + q_0; \qquad Q'(\zeta) = 3q_3\zeta^2 + 2q_2\zeta + q_1;$$

$$f(\zeta) = (b_1\zeta + b_0 + Q(\zeta)/\omega\, d(\zeta))e^{-2i\delta};$$

$$f'(\zeta) = (b_1 + (Q'(\zeta) \cdot \omega\, d(\zeta) - Q(\zeta) \cdot \omega'\, d(\zeta))/\omega\, d(\zeta)^2)e^{-2i\delta};$$

$$\Phi(\zeta) = \varphi'(\zeta)/\omega'(\zeta);$$

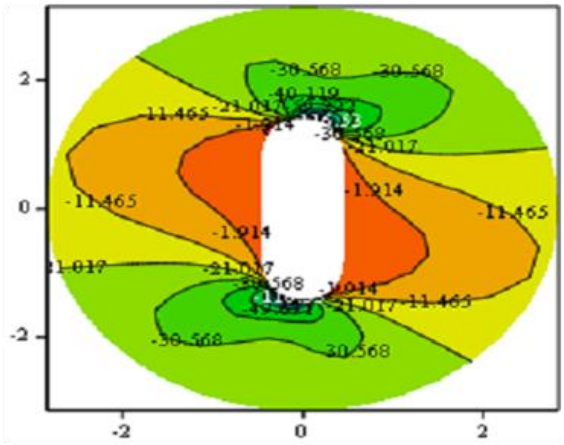
$$\psi(\zeta) = B_0(\zeta) + R_0(\zeta) - f(\zeta) \cdot \varphi'(\zeta); \psi'(\zeta) = B_0{}'(\zeta) + R_0{}'(\zeta) - f'(\zeta) \cdot \varphi'(\zeta) - f(\zeta) \cdot \varphi''(\zeta);$$

$$\Psi(\zeta) = \psi'(\zeta)/\omega'(\zeta);$$

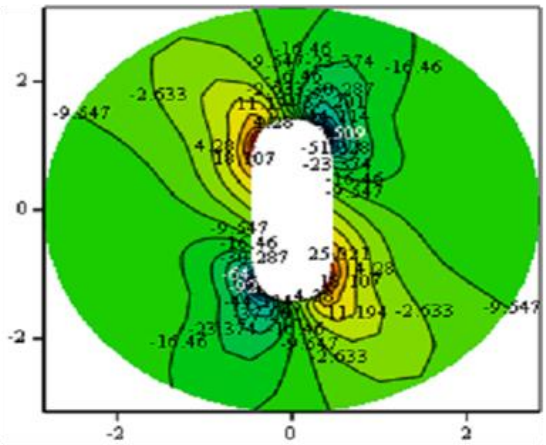
Сумма первых трех полей напряжений в системе криволинейных координат, где для контурных точек туннеля $\rho = 1$, представлена в виде таблицы 3.6 для каждого компонента напряжений. Отсюда видно, что граничные условия (3.5) для туннеля без напора выполняются с высокой точностью. Погрешность не более 10^{-14}. Результаты расчета напряжений без напора на контур туннеля представлены на рис. 3.26. На рис. 3.27 представлены изолинии компонентов относительных деформаций вокруг туннеля.

Таблица 3.6 - Напряжения на контуре туннеля с овальным сечением

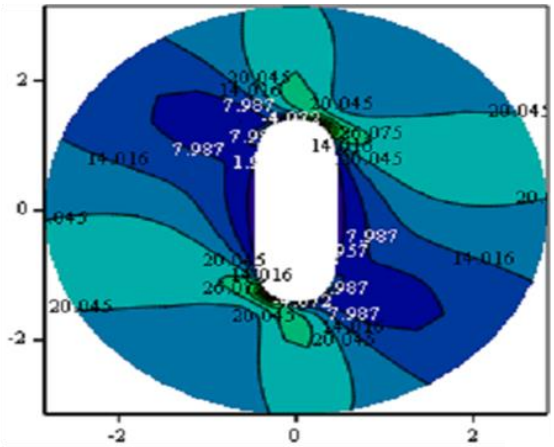
$\sigma_\rho(1,\theta)$ (МПа)	$\tau_{\rho\theta}(1,\theta)$ (МПа)	$\sigma_\theta(1,\theta)$ (МПа)
$-2.84\cdot10^{-14}$	$8.882\cdot10^{-15}$	-243.385
$-4.974\cdot10^{-14}$	$-3.73\cdot10^{-14}$	-254.971
$2.132\cdot10^{-14}$	$2.043\cdot10^{-14}$	-264.289
$-9.237\cdot10^{-14}$	$-1.128\cdot10^{-13}$	-268.089
$-1.101\cdot10^{-13}$	$5.507\cdot10^{-14}$	-260.994
$-7.461\cdot10^{-14}$	$-3.553\cdot10^{-14}$	-238.005
$-9.948\cdot10^{-14}$	$-7.105\cdot10^{-14}$	-199.199
$-2.132\cdot10^{-14}$	$5.100\cdot10^{-14}$	-151.878
$9.948\cdot10^{-14}$	$-3.553\cdot10^{-14}$	-106.031
$-7.105\cdot10^{-14}$	$3.553\cdot10^{-14}$	-68.153



$\boldsymbol{\sigma_x}$

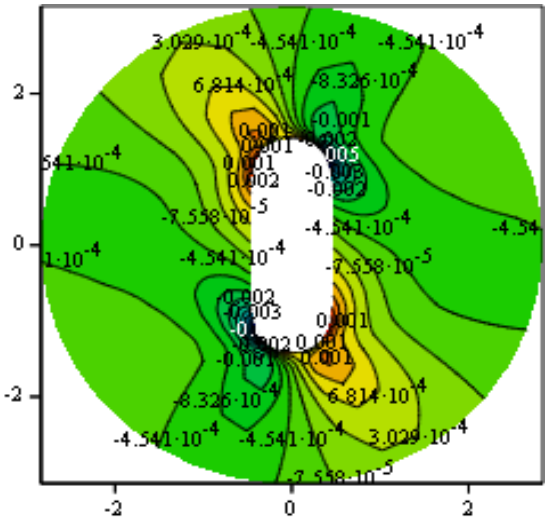


$\boldsymbol{\sigma_y}$

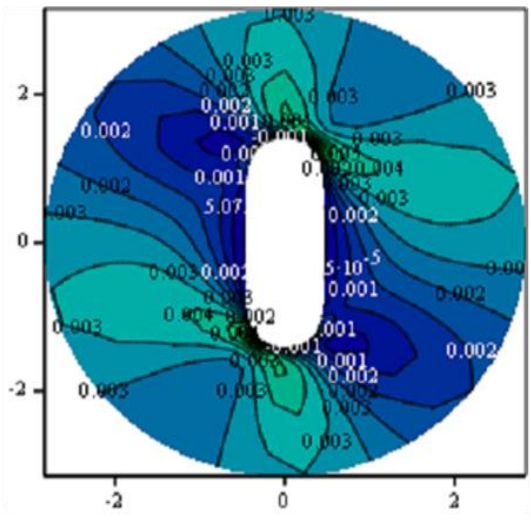


$\boldsymbol{\tau_{xy}}$

Рисунок 3.26 - Изолинии распределения напряжений вокруг туннеля с овальным сечением (МПа)



ε_x



ε_y

Рисунок 3.27 - Изолинии распределения относительных деформаций вокруг туннеля с овальным сечением (МПа)

3.5. Напряженное состояние туннелей с трапециевидным поперечным сечением

Влияние образования туннеля с трапециевидным поперечным сечением на распределение напряжений установлено путем решения граничной задачи (3.5) для плоскости *XOY* с трапециевидным отверстием. Область с подобным отверстием моделируется с помощью отображающей функции:

$$\omega(\zeta) = e^{i\delta} R[\zeta + \omega_0(\zeta)]; \quad \omega_0(\zeta) = \sum_{k=1}^{4} d_k/\zeta^k \qquad (3.32)$$

Здесь $0 \le \rho \le \infty$ ось положительных чисел; $0 \le \theta \le 2\pi$- в радианах. Параметры отображающей функции *d1, d2, d3, d4* путем вариации их значений, например, как в табл. 3.7 можно моделировать в разных трапециевидных формах сечений туннелей рис. 3.28.

Таблица 3.7 - Параметры отображающей функции

№	d_1	d_2	d_3	d_4	δ
$x4_1$—$y4_1$	0,0893	0.0479	-0,1143	0.0893	90 градус
$x4_2$—$y4_2$	-0,0168	0.058	-0,1404	-0,0109	90 градус
$x4_3$—$y4_3$	0,1547	0,0322	-0,1602	-0,0109	90 градус
$x4_4$—$y4_4$	0	0,035	-0,0319	-0,0425	90 градус

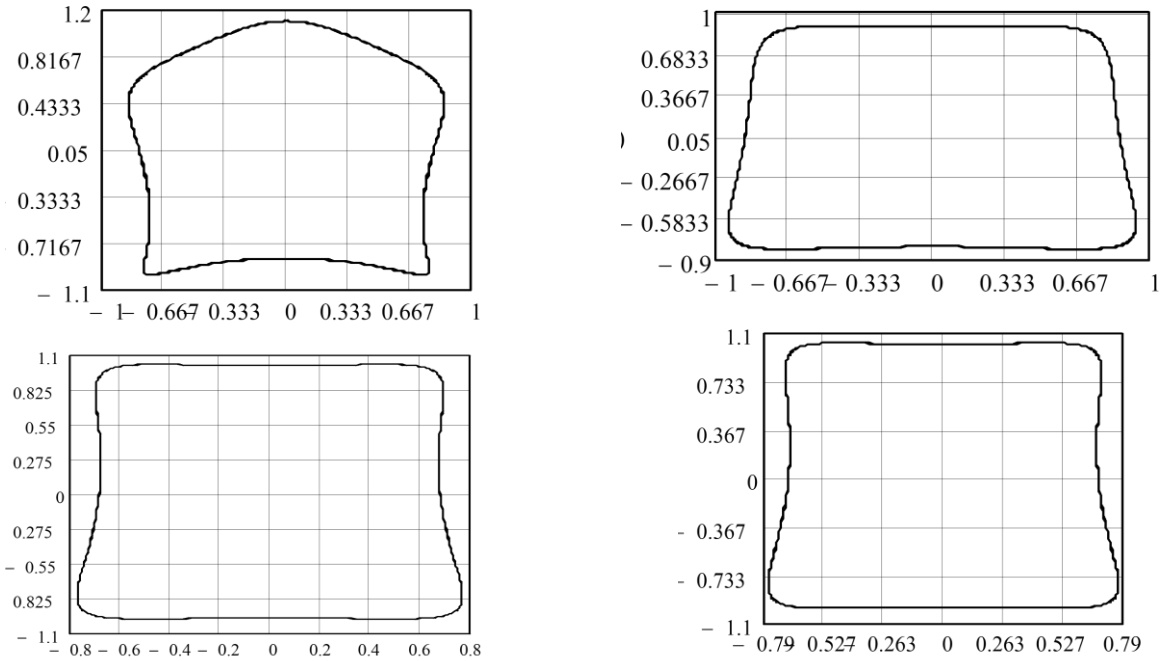


Рисунок 3.28 - Формы трапециевидных поперечных сечений туннелей

Сумма первых трех полей напряжений в контурных точках туннеля удовлетворяют граничным условиям (3.5) или

$$[R\Gamma\sigma + \varphi(\sigma)] + \left[R\overline{\Gamma} + \overline{\varphi'(\sigma)}\right] \cdot \left[\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}\right] + \left[\overline{R\Gamma'\sigma} + \overline{\psi(\sigma)}\right] = 0;$$

$$\left[\overline{R\Gamma\sigma} + \overline{\varphi(\sigma)}\right] + [R\Gamma + \varphi'(\sigma)] \cdot \left[\overline{\omega(\sigma)}/\omega'(\sigma)\right] + [R\Gamma'\sigma + \psi(\sigma)] = 0. \quad (3.33)$$

Эти постоянные введены для обозначения однородного начального напряженного состояния $S_x, S_y,\ S_{xy}$ в центре отверстия, где размещено начало оси координат нового вспомогательного переменного $\zeta = \rho e^{i\theta}$. Функции $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$ определены для внешности единичной окружности, где $\rho = 1$ контурные точки этой окружности обозначены как $\zeta = \sigma = e^{i\theta}$ и $\overline{\zeta} = \overline{\sigma} = e^{-i\theta}$. Отношения $\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}$ и $\overline{\omega(\sigma)}/\omega'(\sigma)$ разлагаются на простые выражения (полином + правильная дробь):

$$\overline{\omega(\sigma)}/\omega'(\sigma) = e^{-2i\delta}[b_4\sigma^4 + b_3\sigma^3 + b_2\sigma^2 + b_1\sigma^1 + b_0 + f_1];$$

$$\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)} = e^{2i\delta}[b_4/\sigma^4 + b_3/\sigma^3 + b_2/\sigma^2 + b_1/\sigma^1 + b_0 + f_2];$$

$$f_1(\sigma) = [q_4\sigma^4 + q_3\sigma^3 + q_2\sigma^2 + q_1\sigma^1 + q_0]/[\sigma^5 - d_1\,\sigma^3 - 2\,d_2\,\sigma^2 - 3\,d_3\,\sigma - 4\,d_4]$$

$$f_2(\sigma) = [q_4\sigma + q_3\sigma^2 + q_2\sigma^3 + q_1\sigma^4 + q_0\sigma^5]/[1 - d_1\,\sigma^2 - 2\,d_2\,\sigma^3 - 3\,d_3\,\sigma^4 - 4\,d_4\,\sigma^5]$$

$b_4=d_4;\ b_3=d_3;\ b_2=d_2+d_1d_4;\ b_1=d_1+2d_2d_4+d_1d_3;\ b_0=3d_3d_4+2d_2b_3+\ d_1b_2;\ q_0=4d_4\ b_0;$

$q_1=4d_4b_1+3d_3b_0 \qquad q_2=4d_4b_2+3d_3b_1+2d_2b_0; \quad q_3=4d_4b_3+3d_3b_2+2d_2b_1+d_1b_0;$

$q_4=1+4d_4b_4+3d_3b_3+2d_2b_2+d_1b_1;$

Интегралы типа Коши от заданных граничных условий (3.31) определяют искомые функции $\varphi(\zeta),\psi(\zeta)$.

Соотношения для определения функций $\varphi(\zeta),\psi(\zeta)$ из граничных условий (12) рационально представить в виде постоянных коэффициентов:

$$N_1 = Re^{i\delta}(S_x + S_y)\,/4;\ \ N_2 = Re^{-i\delta}(S_y - S_x + 2i\,S_{xy})\,/2;\ \ N_3 = \overline{N_1};$$

$a_{01}=-N_1d_1-\ N_3;\ a_{02}=-N_1d_2;\ a_{03}=-N_1d_3;\ a_{04}=-N_1d_4;$

$b_{01}=-N_4d_1-\ N_2;\ b_{02}=-N_4d_2;\ b_{03}=-N_4d_3;\ b_{04}=-N_4d_4;$

Интегралы типа Коши от граничных условий в (3.31) имеют вид:

$$\varphi(\zeta) + G(\zeta) = A_0(\zeta);\ \varphi'(\zeta)\cdot[\overline{\omega}(\zeta)/\omega'(\zeta)] + \psi(\zeta) - \overline{G_0};$$

$$G(\zeta) = \left[b_3\overline{R}_1 + 2b_4\overline{R}_2\right]^{2i\delta}\zeta^{-1} + \left[b_4\overline{R}_1\right]^{2i\delta}\zeta^{-2};$$

$$A_0(\zeta) = \sum_{k=1}^{4} ca_k\zeta^{-k}; \quad B_0(\zeta) = \sum_{k=1}^{4} sb_k\zeta^{-k}; \qquad (3.34)$$

Для выражений в отношениях $\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}$ и $\overline{\omega(\sigma)}/\omega'(\sigma)$ вводим новые обозначения:

$bp0=b_0e^{2i\delta};\ bp1=b_1e^{2i\delta}; \quad bp2=b_2e^{2i\delta}; \quad bp3=b_3e^{2i\delta}; \quad bp4=b_4e^{2i\delta};$

$bp5=b_5e^{2i\delta};\ qp0=qe^{-2i\delta};\ {}_0\ qp1=q_1e^{-2i\delta}; qp2=q_2e^{-2i\delta};\ qp3=q_3e^{-2i\delta};$

$qp4=q_4e^{-2i\delta};\ \ qp5=q_5e^{-2i\delta};$

Первое уравнение (3.34) содержит полюсы второго порядка от второго слагаемого граничного условия в (3.5). Пока их обозначим через $R_1, R_2\ , \overline{R_1}, \overline{R_2}$; Для определения их значений, приравнивая к коэффициентам при одинаковых степенях переменного $\zeta^{-k}(k = 1{,}2)$ правых и левых частей первого уравнения,

будем иметь систему двух уравнений. Добавим к ним сопряженные еще два уравнения и получаем систему из четырех уравнений. Коэффициенты системы имеют вид:

$$M_{0,0} = 1; M_{0,1} = 0; M_{0,2} = -bp_3; M_{0,3} = -2bp_4;$$

$$M_{1,0} = 0; M_{1,1} = 1; \quad M_{1,2} = -bp_4; M_{1,3} = 0;$$

$$M_{2,0} = \overline{M_{0,2}}; M_{2,1} = \overline{M_{0,3}}; M_{2,2} = \overline{M_{0,0}}; M_{2,3} = \overline{M_{0,1}};$$

$$M_{3,0} = \overline{M_{1,2}}; M_{3,1} = \overline{M_{1,3}}\ ; M_{3,2} = \overline{M_{1,0}}; M_{3,3} = \overline{M_{1,1}};$$

Коэффициенты в правой части системы уравнений равны:

$$M0_0 = ca_1; M0_1 = ca_2; M0_2 = \overline{ca_1}; M0_3 = \overline{ca_2};$$

Здесь принято:

$$C_1 = ca_1 + \gamma_1; C_2 = ca_2 + \gamma_2; C_3 = ca_3; C_4 = ca_4;$$

$$\gamma_1 = (b_3\, MR_2 + 2\, b_4\, MR_3)\, e^{2i\delta}; \qquad \gamma_2 = (b_4\, MR_2)\, e^{2i\delta};$$

Решение системы в нотациях MATHCAD имеет вид: $MR = M^{-1} \cdot M0$

Соотношения для вычисления функций:

$$R_0(\zeta) = \left(\sum_{k=1}^{4} r_k \zeta^{-k}\right) e^{-2i\delta}; \qquad Q(\zeta) = \left(\sum_{k=0}^{5} q_k \zeta^{k}\right);$$

$$f(\zeta) = (b_1\, \zeta + b_0 + Q(\zeta)/\omega\, d(\zeta))e^{-2i\delta};$$

$$\psi(\zeta) = B_0(\zeta) + R_0(\zeta) - f(\zeta)\varphi'(\zeta);$$

$$r_1 = \sum_{k=2}^{4} kC_k b_k; \quad r_2 = 4\, C_4 b_3 + 3C_3 b_2; \quad r_3 = 4C_4 b_2;$$

$$\Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}; \quad \Psi(\zeta) = \psi'(\zeta)/\omega'(\zeta);$$

$$\Phi'(\zeta) = (\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta))/\omega'(\zeta)^2$$

Значения параметров отображающей функции заимствуем из второй строки табл. 3.7 и рассмотрим туннель с трапециевидным сечением, контур которого обозначен на рисунке 3.28. через *($x4_2$—$y4_2$)*.

Сумма первых трех полей напряжений в системе криволинейных координат для контурных точек туннеля представлена в виде табл. 3.8 для каждого компонента напряжений.

Таблица 3.8 - Контурные значения напряжений туннеля с трапециевидными сечениями

$\sigma_\rho(1,\theta)$ (МПа)	$\sigma_\theta(1,\theta)$ (МПа)	$\tau_{\rho\theta}(1,\theta)$ (МПа)
0	-53.118	$1.243 \cdot 10^{-14}$
$-1.066 \cdot 10^{-14}$	-56.866	$7.105 \cdot 10^{-15}$
$-7.105 \cdot 10^{-15}$	-63.333	$2.309 \cdot 10^{-15}$
$-7.105 \cdot 10^{-15}$	-73.574	$-1.066 \cdot 10^{-14}$
$-1.776 \cdot 10^{-14}$	-89.4	$-1.421 \cdot 10^{-13}$
$-6.04 \cdot 10^{-14}$	-113.611	$5.329 \cdot 10^{-15}$
$-1.066 \cdot 10^{-14}$	-149.177	$7.283 \cdot 10^{-14}$
$-1.439 \cdot 10^{-13}$	-192.943	$7.638 \cdot 10^{-14}$
$1.741 \cdot 10^{-13}$	-219.091	$3.02 \cdot 10^{-14}$
$1.421 \cdot 10^{-13}$	-191.888	$-6.217 \cdot 10^{-14}$

Отсюда видно, что граничные условия (3.5) для туннеля выполняются с высокой точностью. Погрешность не более 10^{-14}.

Результаты расчета напряжений туннеля представлены на рисунке 3.29., (слева) и (справа) представлены изолинии компонентов относительных деформаций вокруг туннеля.

Вычисленные значения компонентов начального напряженного состояния массива в центре воображаемого туннеля, поле напряжений для выполнения расчетов принимаем как:

$$S_x = -40 \text{ МПа}; \quad S_y = -20 \text{ МПа}; \quad S_{xy} = -10 \text{ МПа}.$$

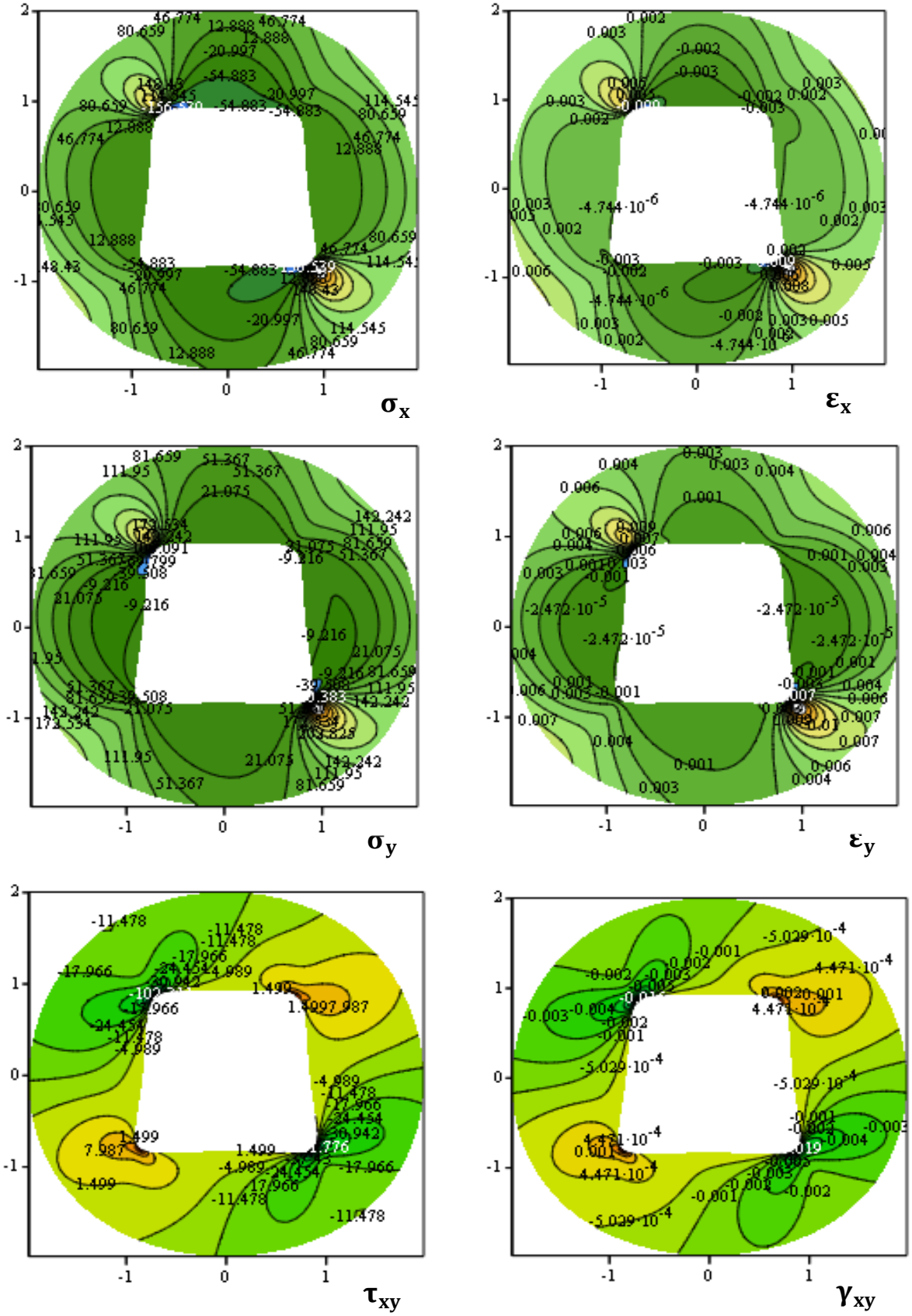


Рисунок 3.29 - Распределение напряжений вокруг туннеля (слева), изолинии распределения относительных деформаций вокруг туннеля (справа) (МПа)

3.6. Расчет напряженного состояния массива вокруг туннеля со сводчатым сечением

Влияние туннеля $\sigma_x^m, \sigma_y^m, \tau_{xy}^m$ устанавливается путем решения граничной задачи для плоскости *xoy* с отверстием, форма которой моделируется с помощью отображающей функции:

$$z = \omega(\zeta); \quad \zeta = \rho e^{i\theta}. \, \omega(\zeta) = e^{i\delta} R[\zeta + \omega_0(\zeta)]; \quad \omega_0(\zeta) = \sum_{k=1}^{5} d_k/\zeta^k \qquad (3.35)$$

Параметры отображающей функции принимаем как d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, путем вариации их значений можно моделировать разнообразные формы сечений туннелей.

В частности, при $d_1=0{,}1416$; $d_2=0{,}0651$; $d_3=-0{,}097$; $d_4=0{,}0371$; $d_5=0{,}0019$; $R=1$; $\delta = \pi/2$ моделируем туннель с сводчатым сечением с развитыми вертикальными стенками.

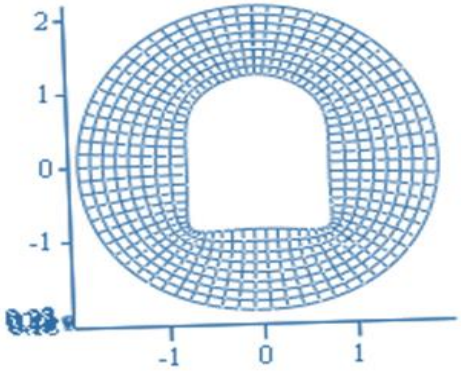


Рисунок 3.30 - Форма сечения туннеля и сетка разбиения области

Таким образом, поле напряжений от влияния возникновения туннеля и напряжений в массиве межгорной впадины $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \tau_{\rho\theta}$, где начальное напряженное состояние в точке возникновения туннеля характеризуется компонентами S_x, S_y, S_{xy}, и будет определено из граничных условий (3.1.)

$$[R\Gamma\sigma + \varphi(\sigma)] + \left[R\overline{\Gamma} + \overline{\varphi'(\sigma)}\right] \cdot \left[\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}\right] + \left[\overline{R\Gamma'\sigma} + \overline{\psi(\sigma)}\right] = 0;$$

$$\left[\overline{R\Gamma\sigma} + \overline{\varphi(\sigma)}\right] + [R\Gamma + \varphi'(\sigma)] \cdot \left[\overline{\omega(\sigma)}/\omega'(\sigma)\right] + [R\Gamma'\sigma + \psi(\sigma)] = 0; \qquad (3.36)$$

Эти постоянные введены в [8] для обозначения однородного начального напряженного состояния S_x, S_y, S_{xy} в центре отверстия, где размещено начало оси координат нового вспомогательного переменного $\zeta = \rho e^{i\theta}$. Функции $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$ определены для внешности единичной окружности, где $\rho = 1$ контурные точки этой окружности обозначены $\zeta = \sigma = e^{i\theta}$ и $\overline{\zeta} = \overline{\sigma} = e^{-i\theta}$. Вдали от контурных точек $\zeta \to \infty$ эти функции стремятся нулю.

Интегралы типа Коши от заданных граничных условий (3.16) определяют искомые функций $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$.

$$N_1 = Re^{i\delta}(S_x + S_y)\,/4;\;\; N_2 = Re^{-i\delta}(S_y - S_x + 2i\,S_{xy})\,/2;\;\; N_3 = \overline{N_1};$$

$$a_{01}=-N_1d_1-N_3;\; a_{02}=-N_1d_2;\; a_{03}=-N_1d_3;\; a_{04}=-N_1d_4;\; a_{05}=-N_1d_5;$$

$$b_{01}=-N_4d_1-N_2;\; b_{02}=-N_4d_2;\; b_{03}=-N_4d_3;\; b_{04}=-N_4d_4;\; b_{05}=-N_4d_5;$$

$$b_{11}=P_0Re^{-i\delta};\;\; sb_1= b_{01}\; sb_2= b_{02};\; sb_3= b_{03};\; sb_4= b_{04};\; sb_5= b_{05};$$

$$ca_1= a_{01}\; ca_2= a_{02};\; ca_3= a_{03};\; ca_4= a_{04};\; ca_5= a_{05};$$

Интегралы типа Коши от граничных условий в (3.1) и (3.34) имеют вид:

$$\varphi(\zeta) + G(\zeta) = A_0(\zeta);\;\; \varphi'(\zeta)\cdot\left[\frac{\overline{\omega}(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right] + \psi(\zeta) - \overline{G_0}(\zeta) = B_0(\zeta); \qquad (3.37)$$

$$G(\zeta) = \left[b_3\overline{R}_1 + 2b_4\overline{R}_2 + 3b_5\overline{R}_3\right]e^{2i\delta}\zeta^{-1} + \left[b_4\overline{R}_1 + 2b_5\overline{R}_2\right]e^{2i\delta}\zeta^{-2} + \left[b_5\overline{R}_1\right]e^{2i\delta}\zeta^{-3};$$

$$A_0(\zeta) = \sum_{k=1}^{5} ca_k\zeta^{-k}; \qquad B_0(\zeta) = \sum_{k=1}^{5} sb_k\zeta^{-k};$$

Для разложений в отношениях $\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}$ и $\overline{\omega(\sigma)}/\omega'(\sigma)$ вводим новые обозначения:

$$bp0=b_0e^{2i\delta};\;\; bp1=b_1e^{2i\delta};\;\; bp2=b_2e^{2i\delta};\;\; bp3=b_3e^{2i\delta};\;\; bp4=b_4e^{2i\delta};$$

$$bp5=b_5e^{2i\delta};qp0=q_0;\; qp1=q_1;\; qp2=q_2;\; qp3=q_3;\; qp4=q_4;\; qp5=q_5;$$

Первое уравнение (3.36) содержит полюсы третьего порядка от интеграла второго слагаемого граничного условия в (3.5). Пока их обозначим через $R_1, R_2, R_3, \overline{R_1}, \overline{R_2}, \overline{R_3}$; Для определения их значений, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменного $\zeta^{-k}(k = 1,2,3)$ правых и левых частей первого уравнения, будем иметь систему трех уравнений.

Добавим к ним сопряженные уравнения и приводим систему из шести уравнений. Коэффициенты системы имеют вид:

$$M_{0,0} = 1; M_{0,1} = 0; M_{0,2} = 0; M_{0,3} = -bp_3; M_{0,4} = -2bp_4; M_{0,5} = -3bp_5;$$

$$M_{1,0} = 0; M_{1,1} = 1; M_{1,2} = 0; M_{1,3} = -bp_4; M_{1,4} = -2bp_5; M_{1,5} = 0;$$

$$M_{2,0} = 0; M_{2,1} = 0; M_{2,2} = 1; M_{2,3} = -bp_5; M_{2,4} = 0; M_{2,5} = 0;$$

$$M_{3,0} = \overline{M_{0,3}}; M_{3,1} = \overline{M_{0,4}}; M_{3,2} = \overline{M_{0,5}}; M_{3,3} = \overline{M_{0,0}}; M_{3,4} = \overline{M_{0,1}}; M_{3,5} = \overline{M_{0,2}};$$

$$M_{4,0} = \overline{M_{1,3}}; M_{4,1} = \overline{M_{1,4}}; M_{4,2} = \overline{M_{1,5}}; M_{4,3} = \overline{M_{1,0}}; M_{4,4} = \overline{M_{1,1}}; M_{4,5} = \overline{M_{1,2}};$$

$$M_{5,0} = \overline{M_{2,3}}; M_{5,1} = \overline{M_{2,4}}; M_{5,2} = \overline{M_{2,5}}; M_{5,3} = \overline{M_{2,0}}; M_{5,4} = \overline{M_{2,1}}; M_{5,5} = \overline{M_{2,2}};$$

Коэффициенты в правой части системы уравнений равны: $M0_0 = ca_1; M0_1 = ca_2; M0_2 = ca_3; M0_3 = \overline{ca_1}; M0_4 = \overline{ca_2}; M0_5 = \overline{ca_3};$ Методом векторной алгебры ответ решения системы приведен в элементах массива-столбца MR ,где $MR = M^{-1} \cdot M\,0$. Соотношения для функции $\varphi(\zeta)$ после объединения коэффициентов при $\zeta^{-k}(k = 1,2,3)$ представлены в удобном для расчета форме. Здесь принято:

$$C_1 = ca_1 + \gamma_1; C_2 = ca_2 + \gamma_2; C_3 = ca_3 + \gamma_3; C_4 = ca_4; C_5 = ca_5;$$

$$\gamma_1 = (b_3\, MR_3 + 2\, b_4\, MR_4 + 3\, b_5\, MR_5)\, e^{2i\delta}; \gamma_2 = (b_4\, MR_3 + 2\, b_5\, MR_4)\, e^{2i\delta}; \gamma_3 = b_5\, MR_3\, e^{2i\delta};$$

$$\mathrm{MR} = \begin{pmatrix} 18.878 + 7.071\mathrm{i} \\ -0.698 + 1.332\mathrm{i} \\ -0.036 - 1.573\mathrm{i} \\ 18.878 - 7.071\mathrm{i} \\ -0.698 - 1.332\mathrm{i} \\ -0.036 + 1.573\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Соотношения для функций;

$$R_0(\zeta) = (\sum_{k=1}^{4} r_k \zeta^{-k})\, e^{-2i\delta}; \qquad Q(\zeta) = (\sum_{k=0}^{5} q_k \zeta^{k});$$

$$f(\zeta) = (b_1\, \zeta + b_0 + Q(\zeta)/\omega\, d(\zeta))e^{-2i\delta}; \quad \psi(\zeta) = B_0(\zeta) + R_0(\zeta) - f(\zeta)\varphi'(\zeta);$$

$$\Phi\zeta) = \varphi'(\zeta)/\omega'(\zeta); \;\; \Psi(\zeta) = \psi'(\zeta)/\omega'(\zeta)$$

$$\Phi'(\zeta) = (\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta))/\omega'(\zeta)^2$$

$$r_1 = \sum_{k=2}^{5} kC_k b_k; r_2 = 5C_5 b_4 + 4\,C_4 b_3 + 3C_3 b_2;$$

$$r_3 = 5C_5 b_3 + 4C_4 b_2; r_4 = 5C_5 b_2;$$

Сумма первых трех полей напряжений в системе криволинейных координат, где для контурных точек туннеля при $\rho = 1$, для каждого компонента напряжений представлены в виде таблицы.3.9.

Таблица 3.9 - Компоненты напряжений на контуре сводчатым сечением туннеля

$\sigma_\rho(1,\theta)$ (МПа)	$\tau_{\rho\theta}(1,\theta)$ (МПа)	$\sigma_\theta(1,\theta)$ (МПа)
$-2.487\cdot10^{-14}$	$-8.171\cdot10^{-14}$	-67.989
$5.151\cdot10^{-14}$	$-1.424\cdot10^{-14}$	-51.145
$-3.553\cdot10^{-14}$	$-2.487\cdot10^{-14}$	-33.736
$-1.066\cdot10^{-14}$	$1.421\cdot10^{-14}$	-17.319
$-2.842\cdot10^{-14}$	$1.776\cdot10^{-14}$	-2.707
$7.105\cdot10^{-14}$	$-3.908\cdot10^{-14}$	10.007
$-2.842\cdot10^{-14}$	$-7.105\cdot10^{-15}$	21.088
$4.974\cdot10^{-14}$	$-6.217\cdot10^{-14}$	30.765
$-1.421\cdot10^{-14}$	$-2.487\cdot10^{-14}$	38.89
0	$-7.994\cdot10^{-14}$	44.762

Из трёх компонентов только одна - окружная компонента отличная от нуля, а другие нормальная и касательная компоненты во всех точках близки к нулю.

Найденные компоненты напряжений позволили с помощью Закона Гука [68] вычислить компоненты относительных деформаций. Значение модуля Юнга E = $1{,}71\cdot10^4$ МПа и коэффициента Пуассона. Числовые значения приняты:

S_x= -30МПа; S_y = -10Мпа; S_{xy}= -9МПа.

Результаты расчета представлены на рисунке 3.31 в виде изолинии распределения напряжений и компонентов относительных деформаций.

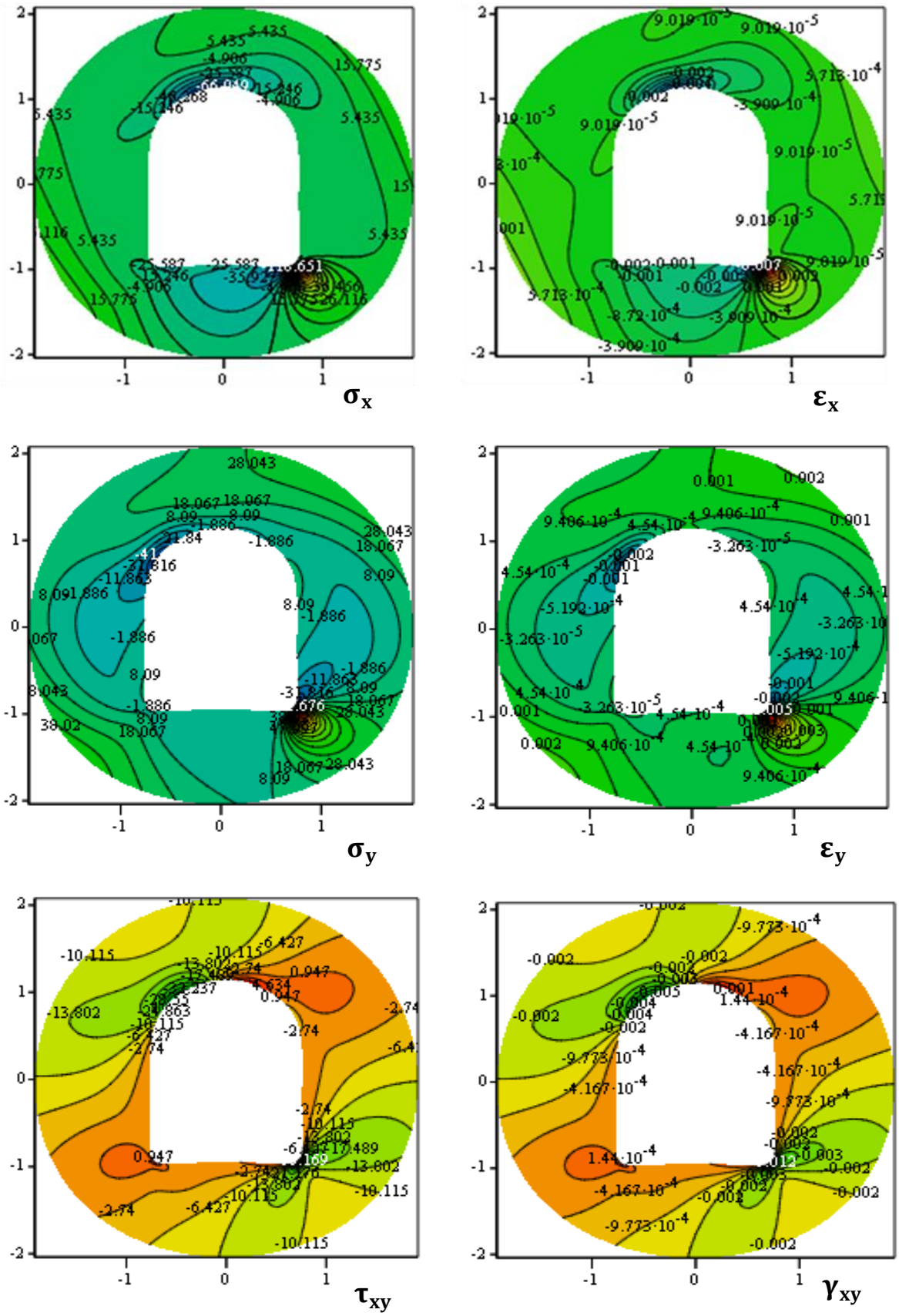


Рисунок 3.31 - Распределение напряжений (слева), угловых относительных деформаций (справа) вокруг туннеля со сводчатым сечением (МПа)

ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 3

1. Начальное напряженное состояние одиночной горы, ранее в работе [43, с.311-314] было смоделировано при действии гравитационных сил. Здесь дополнительно в [43, с.311-314] учтено горизонтальное тектоническое сжатие - растяжение.
2. Модель напряженного и деформированного состояния безнапорного туннеля, рассмотренного в главе 3, имеет самостоятельное научное значение в механике горных пород, где именуется научной проблемой – оценка напряженно-деформированного состояния вокруг горных выработок.
3. Величина допущенной погрешности граничных задач (3.1) или (3.5) не более чем 10^{-14}, что свидетельствует о их согласованности со значениями компонента напряжений в таблицах 3.1-3.4, 3.6, 3.8, 3.9 для контурных точек туннелей.
4. Состояние массивов вокруг туннелей и выработок в условиях действия только силы гравитации при $T_x = 0$ математически описывается с помощью созданной модели в подразделах 3.1-3.7.
5. Ранее выполненные научные исследования для горных выработок, расположенных в весомой полуплоскости, вновь вытекают из результатов этой главы, если в (2.1) не учитываем влияние рельефа (второе поле напряжений) на распределение напряжений.
6. Результаты этой главы 3 опубликованы в работах совместно с Б. Жумабаевым [21-24, 26, 29-34] и самостоятельно [35, 36].

ГЛАВА 4. РАПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ВОКРУГ ТУННЕЛЕЙ ОТ ДЕЙСТВИЯ НАПОРА ВОДЫ

4.1. Постановка задачи

Влияние туннеля на $\sigma_x^н, \sigma_y^н, \tau_{xy}^н$ устанавливается путем решения граничной задачи для плоскости *xoy* с отверстием, типовые формы которого моделируются с помощью отображающей функции (3.2). Параметры отображающей функции приняты как $d_1,\ d_2, d_3, d_4, d_5$, путем вариации их значений были моделированы напряжения при разных формах поперечного сечения и представлены в виде эпюр (см. Глава 3). Напряженное состояние массивов вокруг туннелей трех полей напряжений (2.1), в контурных точках удовлетворяет граничным условиям (3.1) и запишем его в следующем виде:

$$\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} \cdot \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = i\int_0^s (X_n - \imath Y_n)ds + const$$

$$\overline{\varphi(\sigma)} + \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \cdot \varphi'(\sigma) + \psi(\sigma) = -i\int_0^s (X_n + Y_n)ds + const \qquad (4.1)$$

Согласно методу [68] граничное условие (4.1) следует из соотношения:

$$X_n = -P\cos(n,x) \qquad Y_n = -P\cos(n,y)$$

$$(X_n + iY_n)ds = -P(dy - idx) = Pi\bar{d}z$$

$$(X_n - iY_n)ds = -P(dy + idx) = -Pidz \qquad (4.2)$$

Когда на контур туннеля действует гидростатический напор *(–P₀)* после вычисления интегралов в правой части (4.2) необходимо решать граничную задачу в главе 3 по определению функций $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$ из граничных условий:

$$\varphi(\sigma) + \overline{\varphi'(\sigma)} \cdot \left[\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}\right] + \overline{\psi(\sigma)} = -P_0 R\omega(\sigma);$$

$$\overline{\varphi(\sigma)} + \varphi'(\sigma) \cdot \left[\overline{\omega(\sigma)}/\omega'(\sigma)\right] + \psi(\sigma) = -P_0 R\overline{\omega(\sigma)}. \qquad (4.3)$$

Компоненты напряжений $\sigma_x^н, \sigma_y^н, \tau_{xy}^н$ или $\sigma_\rho^н, \sigma_\theta^н, \tau_{\rho\theta}^н$ выражаются через найденные из граничного условия (4.3) функции $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$ в зависимости от поперечного сечения туннеля и от величины напора воды P_0. Напомним , что в главе 3 интегралы типа Коши от выражений, стоящие в левой части (4.3), уже

вычислены. Остается теперь вычислить только значения интегралов типа Коши от правых частей (4.3) для разновидностей поперечных сечений туннелей.

Интергралы типа Коши от граничных условий в (4.1) имеют вид:

$$\varphi(\zeta) + G(\zeta) = A_0(\zeta);\ \varphi'(\zeta) \cdot [\overline{\omega}(\zeta)/\omega'(\zeta)] + \psi(\zeta) - \overline{G_0}; \qquad (4.4)$$

$$G(\zeta) = \left[b_3\overline{R}_1 + 2b_4\overline{R}_2 + 3b_5\overline{R}_3\right]e^{2i\delta}\zeta^{-1} + \left[b_4\overline{R}_1 + 2b_5\overline{R}_2\right]e^{2i\delta}\zeta^{-2} + \left[b_5\overline{R}_1\right]e^{2i\delta}\zeta^{-3};$$

$$A_0(\zeta) = \sum_{k=1}^{5} ca_k\zeta^{-k}; B_0(\zeta) = \sum_{k=1}^{5} sb_k\zeta^{-k}; \qquad (4.5)$$

4.2. Распределения напряжений вокруг туннеля эллиптической и круглой формы от действия напора воды

В работах [68, 75] определено напряженное состояние вокруг туннелей, формы которых заданы контурными кривыми эллипса и круга и использована отображающая функция (3.2), при $d_1 = m, d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = 0$.

Напряженное состояние вокруг напорного туннеля $\sigma_\rho^н, \sigma_\theta^н, \tau_{\rho\theta}^н$ - поле напряжений от напора - *P*, действующего нормально к контуру туннеля.

Когда задано на контуре отверстия внешнее давление $-P$ то, в правой части величины граничных условий (4.1) принимают следующий вид и напряжения $\sigma_x^н, \sigma_y^н, \tau_{xy}^н$ или $\sigma_\rho^н, \sigma_\theta^н, \tau_{\rho\theta}^н$ характеризуются функциями:

$$\varphi(\zeta) = \frac{PRme^{i\delta}}{\zeta};\ \psi(\zeta) = \frac{PRe^{-i\delta}}{\zeta} - \left(\rho \cdot e^{i\theta}\right) \cdot \frac{(1+m\varsigma^2)\varsigma e^{-2i\delta}}{(\rho \cdot e^{-i\theta})^2 - m} \cdot \varphi\rho(\zeta);$$

$$\Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}; \quad \psi(\zeta) = \frac{\psi(\zeta)}{\omega'(\zeta)};$$

$$\Phi'(\zeta) = \frac{\phi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \phi'(\zeta)\omega''(\zeta)}{\omega'(\zeta)^2}. \qquad (4.6)$$

Присвоив *P* = *-1* МПа, вычисляется распределение напряжений $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \tau_{\rho,\theta}$ – поле напряжений от напора -*P* действующего нормально к контуру туннеля и результаты представлены в табл. 4.1.

Таблица 4.1 - Контурные напряжения вокруг эллиптического туннеля от действия напора воды

№	θ	σ_ρ (МПа)	σ_θ (МПа)	$\tau_{\rho,\theta}$ (МПа)
0	0	-1	3.67	0
1	0	-1	3.667	0
2	10	-1	3.115	$1.443 \cdot 10^{-15}$
3	20	-1	2.07	$3.331 \cdot 10^{-15}$
4	30	-1	1.211	0
5	40	-1	0.645	$1.193 \cdot 10^{-15}$
6	50	-1	0.293	0
7	60	-1	0.077	0
8	70	-1	-0.052	0
9	80	-1	-0.121	0
10	90	-1	-0.143	0

Когда туннель имеет круглое сечение, положив в построенных решениях (2) *m=0* и с теми же начальным состоянием массива S_x, S_y, S_{xy}, как в таб.4.2. построенные изолинии представлены на рис. 4.2 изолинии, которые возникают только от напора *P = -1МПа*, в этом случае *m = 0* (полная симметрия).

Таблица 4.2 - Контурные значения напряжений для туннеля с круглым сечением

$\sigma_\rho(\rho,\theta)$ (МПа)	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
$\sigma_\theta(\rho,\theta)$ (МПа)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\tau_{\rho,\theta}(\rho,\theta)$(МПа)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Как видно из рис. 4.1 при *P = -1МПа* концентрации напряжений вокруг эллиптического туннеля σ_ρ = 0.702МПа и σ_θ = 1.3775МПа являются растягивающими. При одинаковых начальных напряженных состояниях концентрация напряжений вокруг круглой и эллиптических туннелей отмечаются: по компонентам σ_ρ более 46 раз, σ_θ – 3 раза, $\tau_{\rho,\theta}$ – 20 раз (рис. 4.1 и 4.2).

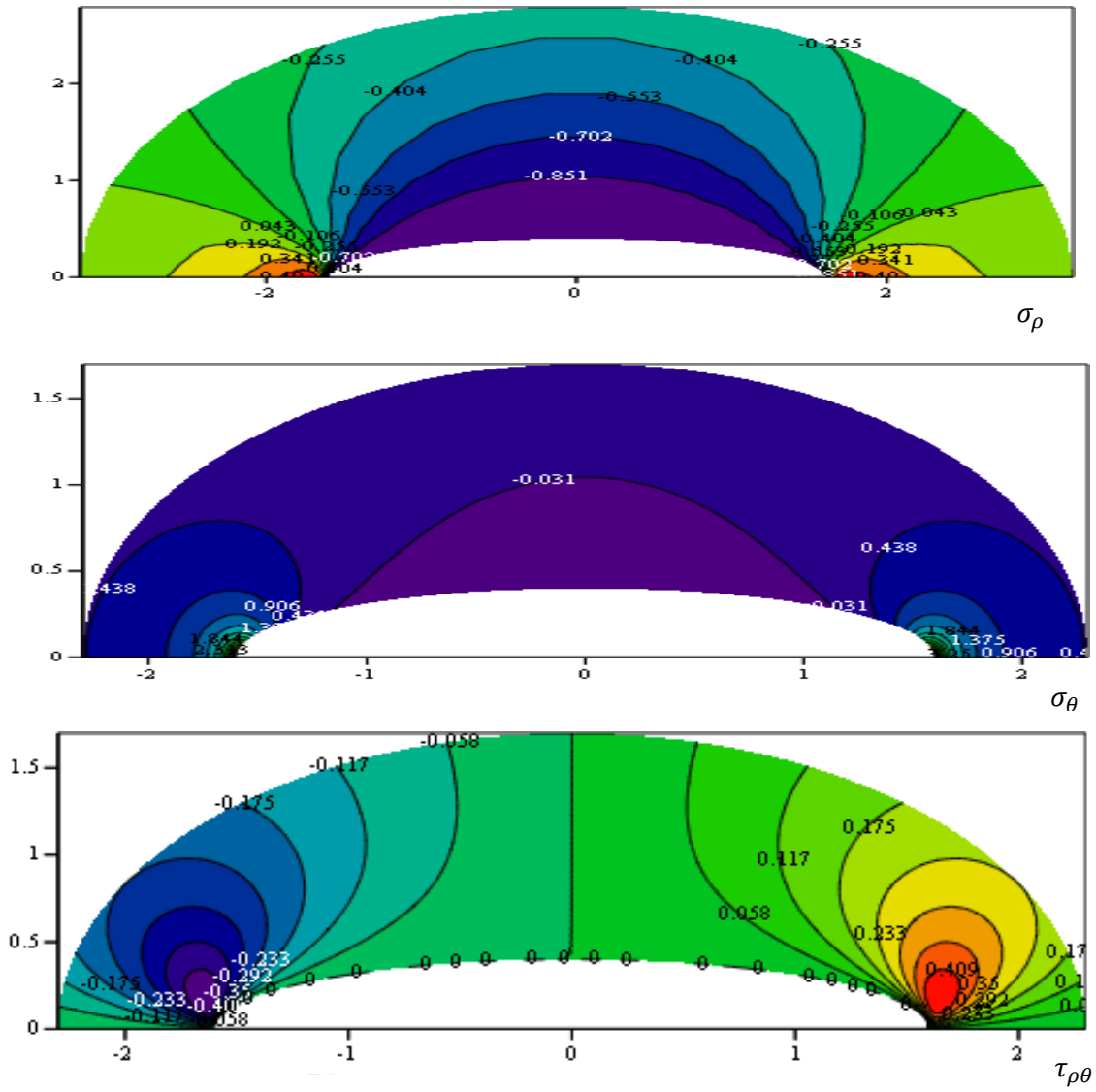


Рисунок 4.1 - Распределение напряжений на контуре эллиптического туннеля только от напора воды (МПа)

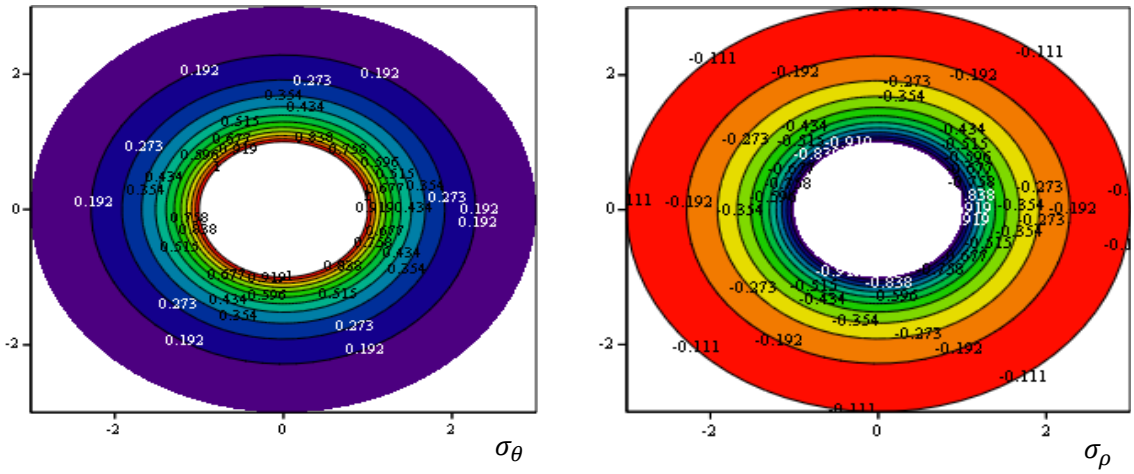


Рисунок 4.2 - Распределение напряжений на контуре туннеля только от напора воды (МПа)

4.3. Распределение напряжений вокруг туннеля с треугольным сечением от напора воды

Влияние туннеля на $\sigma_x^н, \sigma_y^н, \tau_{xy}^н$ устанавливается путем решения граничной задачи (4.1) для плоскости *xoy* с треугольным отверстием, форма которой моделируется с помощью отображающей функции (3.2). Соотношения для определения функций $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$ из граничных условий (4.1) идентичны, и поэтому переопределим только постоянные с учетом (4.6) в виде:

$a_{11}=e^{i\delta}P_0Rd_1$; $a_{12}=e^{i\delta}P_0R\,d_2$; $b_{11}=P_0Re^{-i\delta}$; $sb_1= b_{11;\,sb2}= b_{02}$; $ca_1= a_{11}$; $ca_2 = a_{12}$;

Интегралы типа Коши от граничных условий в (4.1) и (4.6) имеют вид:

$$\varphi(\zeta) = A_0(\zeta); \quad \varphi'(\zeta)\cdot[\overline{\omega}(\zeta)/\omega'(\zeta)] + \psi(\zeta) = B_0(\zeta); \tag{4.7}$$

Соотношения для функций $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$ запишем в следующем виде:

$$\psi(\zeta) = B_0(\zeta) + R_0(\zeta) - f(\zeta)\varphi'(\zeta); \;\; r_1 = 2C_2b_2; \;\; \Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)};$$

$$\Psi(\zeta) = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}; \;\; \Phi'(\zeta) = (\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta))/\omega'(\zeta)^2$$

Суммарное поле напряжений в (1.1), когда напор P_0=*-25 МПа*, для контурных точек туннеля представлено в табл. 4.3.

Таблица 4.3 - Напряжения в контурных точках напорного туннеля с треугольным поперечным сечением

№	$\sigma_\rho(1,\theta)$ (МПа)	$\tau_\theta(1,\theta)$ (МПа)	$\sigma_\theta(1,\theta)$ (МПа)
1	-25	0	125
2	-25	$8.882\cdot10^{-14}$	107.008
3	-25	$-1.137\cdot10^{-13}$	72.663
4	-25	$4.974\cdot10^{-14}$	44.074
5	-25	$1.776\cdot10^{-15}$	25
6	-25	$1.776\cdot10^{-15}$	12.834
7	-25	$6.55\cdot10^{-15}$	5
8	-25	$-2.109\cdot10^{-15}$	-0.146
9	-25	$-5.551\cdot10^{-15}$	-3.571
10	-25	0	-5.839

Результаты полученных исследований представлены на рисунках 4.3. и 4.4.

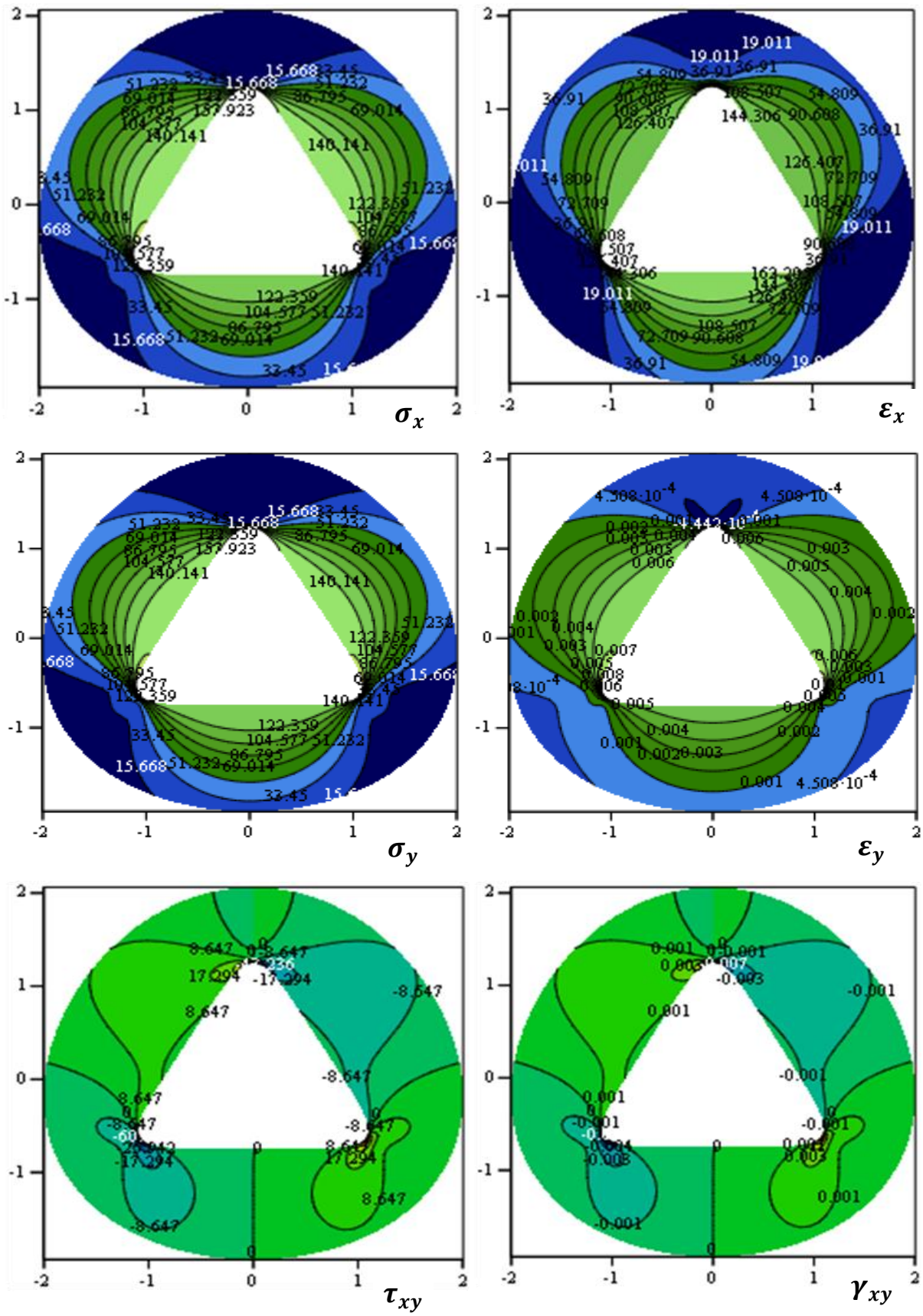


Рисунок 4.3 - Изолинии распределения напряжений на контуре туннеля только от напора воды (МПа)

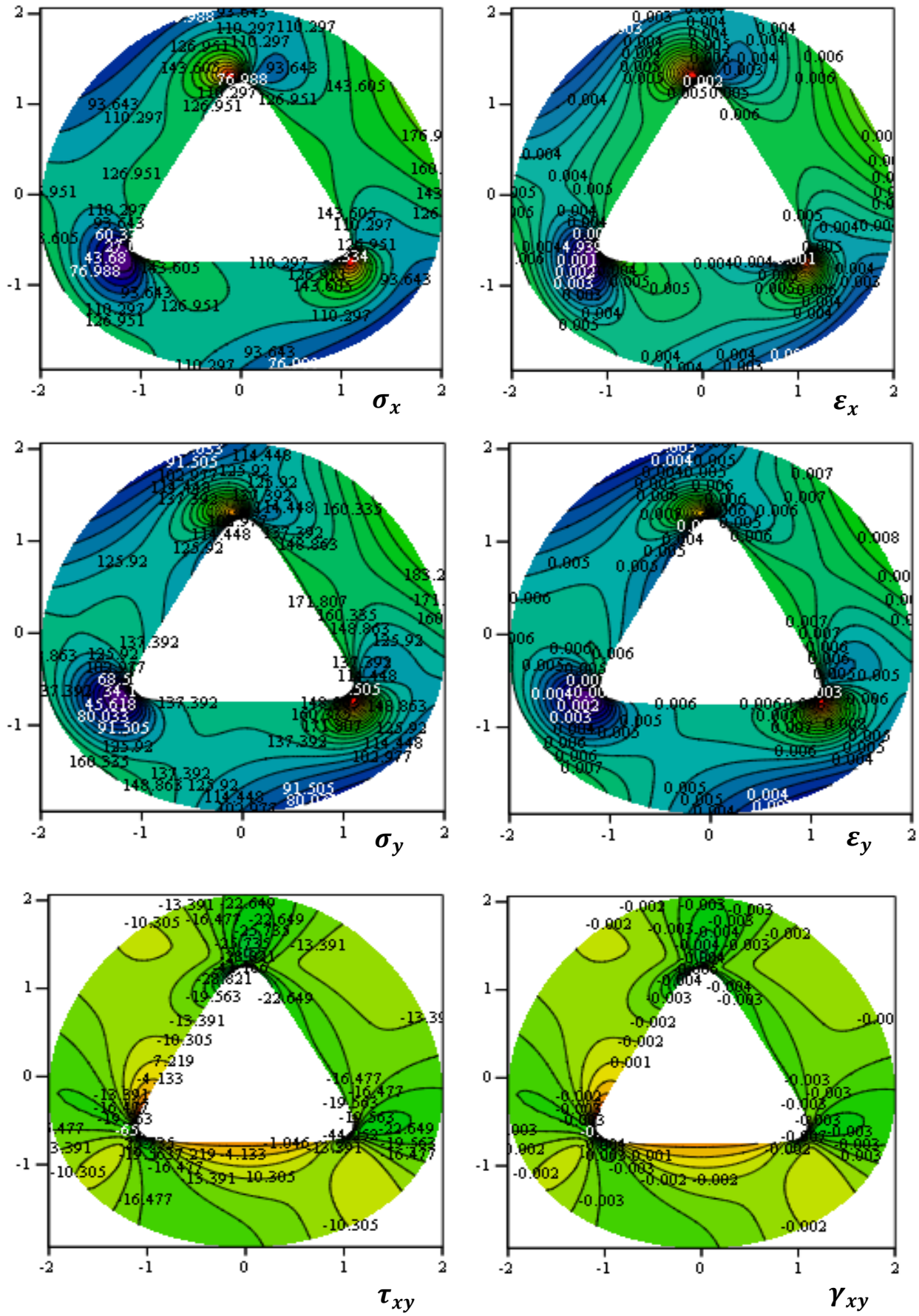


Рисунок 4.4 - Распределение напряжений (слева) и относительных деформаций (справа) вокруг напорного туннеля от совместных сил (МПа)

Результаты распределения напряжений и относительных деформаций для всех компонентов приведены на (см. рисунок 4.4) в виде изолиний. В рамках закона Гука [68] вычислены компоненты напряжений и относительных деформаций при значении модуля Юнга $E= 1,71\cdot10^4$ *МПа* и коэффициента Пуассона, с учетом напора воды. Для выполнения расчетов напряженное состояние принято, как:

$$S_x = -30 \text{ МПа}; \quad S_y = -15 \text{ МПа}; \quad S_{xy} = -15 \text{ МПа}.$$

Отсюда видно, что распределение напряжений и деформаций вокруг туннеля с напором воды изменяется слабо, значит, построенная модель позволяет оценить почти точно напряженное состояние массивов вокруг туннеля.

При этом величина допущенной погрешности граничных условий (4.3) не более чем 10^{-14}.

4.4. Распределение напряжений вокруг туннеля с овальным сечением от напора воды

Как и в главе 3 функция (3.2) содержит три слагаемые. Вариация параметров отображающей функции d_1, d_2, d_3 допускает моделирование НДС при различных формах сечений туннелей (см. рисунок 3.2).

Когда на контур туннеля действует гидростатический напор $(-P_0)$, необходимо решать граничные задачи по определению функций $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$ из условий (4.1).

Граничные значения функций $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$ представляются в виде:

$$\varphi(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k \sigma^{-k}; \psi(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k \sigma^{-k};$$

$$\varphi'(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} -kR_k \sigma^{-k-1};$$

Соотношения для определения функций $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$ из граничных условий (4.2) идентичны вышеприведенными в п.3.4 главы 3, и поэтому рационально переопределим только постоянные коэффициенты:

$$a_{11}=e^{i\delta}P_0Rd_1;\ a_{12}=e^{i\delta}P_0Rd_2;\ \ a_{13}=e^{i\delta}P_0Rd_3;$$

$$b_{11}=P_0Re^{-i\delta};\ \ sb_1=b_{11};\ \ sb_2=0;\ \ sb_3=0;\ \ ca_1=a_{11};\ \ ca_2=a_{12};\ \ ca_3=a_{13};$$

Интегралы типа Коши от граничных условий в (4.1) идентично как в формуле (3.31) (см. глава 3).

Система уравнений решена методом векторной алгебры, которая в пакете программ MATHCAD [63] оформлена как простая вычисляемая функция.

Результат решения системы выделен отдельно $MR = M^{-1} \cdot M0$;

$$\mathrm{MR} = \begin{pmatrix} 18.062 + 12.32\mathrm{i} \\ 18.062 - 12.32\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Первое уравнение, после объединение коэффициентов при одинаковых степенях переменной $\zeta^{-k}(k = 1,2,3)$, принимает вид:

$$\varphi(\zeta) = C_1/\zeta^{-1} + C_2/\zeta^{-2} + C_3/\zeta^{-3};$$

где, $C_1 = ca1 + \gamma_1;\ C_2 = ca2;\ C_3 = ca3;\ \gamma_1 = b_3 MR_1 e^{2i\delta}.$

$$R_0(\zeta) = (r_1/\,\zeta^1 + r_2/\,\zeta^2)e^{-2i\delta}; \quad r_1 = 3C_3\,b_3 + 2C_2\,b_2; r_2 = 3C_3\,b_2;$$

$$\omega\,d(\,\zeta) = (\zeta^4 - d_1\zeta^2 - 2d_2\zeta - 3d_3); \quad \omega^{'}d(\,\zeta) = 4\zeta^3 - 2d_1\zeta - 2d_2;$$

$$Q(\,\zeta) = q_3\zeta^3 + q_2\zeta^2 + q_1\zeta + q_0; \quad Q^{'}(\zeta) = 3q_3\zeta^2 + 2q_2\zeta + q_1;$$

$$f(\,\zeta) = (b_1\zeta + b_0 + Q(\,\zeta)/\omega\,d(\,\zeta))e^{-2i\delta};$$

$$f^{'}(\zeta) = (b_1 + (Q^{'}(\zeta) \cdot \omega\,d(\,\zeta) - Q(\,\zeta) \cdot \omega^{'}d(\,\zeta))/\omega\,d(\,\zeta)^2)e^{-2i\delta};$$

$$\Phi(\zeta) = \varphi^{'}(\zeta)/\omega^{'}(\zeta);\ \psi(\zeta) = B_0(\zeta) + R_0(\zeta) - f(\,\zeta) \cdot \varphi^{'}(\zeta);$$

$$\psi^{'}(\zeta) = B_0{}^{'}(\zeta) + R_0{}^{'}(\zeta) - f^{'}(\zeta) \cdot \varphi^{'}(\zeta) - f(\,\zeta) \cdot \varphi^{''}(\zeta);\ \Psi(\zeta) = \psi^{'}(\zeta)/\omega^{'}(\zeta);$$

Результаты исследования вычислены аналогично как п.4.3, и их числовые значения равны:

$$S_x = -35\ МПа;\ \ S_y = -30\ МПа\ ;\ S_{xy} = -25\ МПа.$$

При действии напора $P = -50$ МПа на контуре туннеля вычисленные значения компонентов напряжений приведены в таблице 4.4.

Таблица 4.4 - Напряжения на контуре с овальным сечением туннеля от напора воды

$\sigma_\rho(1,\theta)$ (МПа)	$\sigma_\theta(1,\theta)$ (МПа)	$\tau_\theta(1,\theta)$ (МПа)
-50	82.779	0
-50	84.036	0
-50	87.603	$-7.105 \cdot 10^{-15}$
-50	92.772	$-1.006 \cdot 10^{-14}$
-50	98.085	$-3.553 \cdot 10^{-14}$
-50	101.119	0
-50	99.393	$-1.006 \cdot 10^{-14}$
-50	91.012	$-9.415 \cdot 10^{-14}$
-50	76.84	$4.974 \cdot 10^{-14}$
-50	59.748	$2.132 \cdot 10^{-14}$

Моделирование напорного туннеля с горизонтальным овальным сечением приводится ниже. Результаты контурных напряжений, где из трех компонентов только одна – окружная компонента отлична от нуля, а другие компоненты равны нулю. Нормальное и касательное напяжения во всех точках близки нулю. Результаты расчета напряжений от действия напора на контур туннеля представлены на рис. 4.5.

На рис. 4.6. представлены изолинии компонентов напряжений и относительных деформаций вокруг туннеля, которые имеет место после действия напора воды.

Граничные условия в этом случае выполняются с достаточной точностью, как приведено в табл. 4.4, максимальное значение σ_θ = 101.119 МПа и является растягивающим.

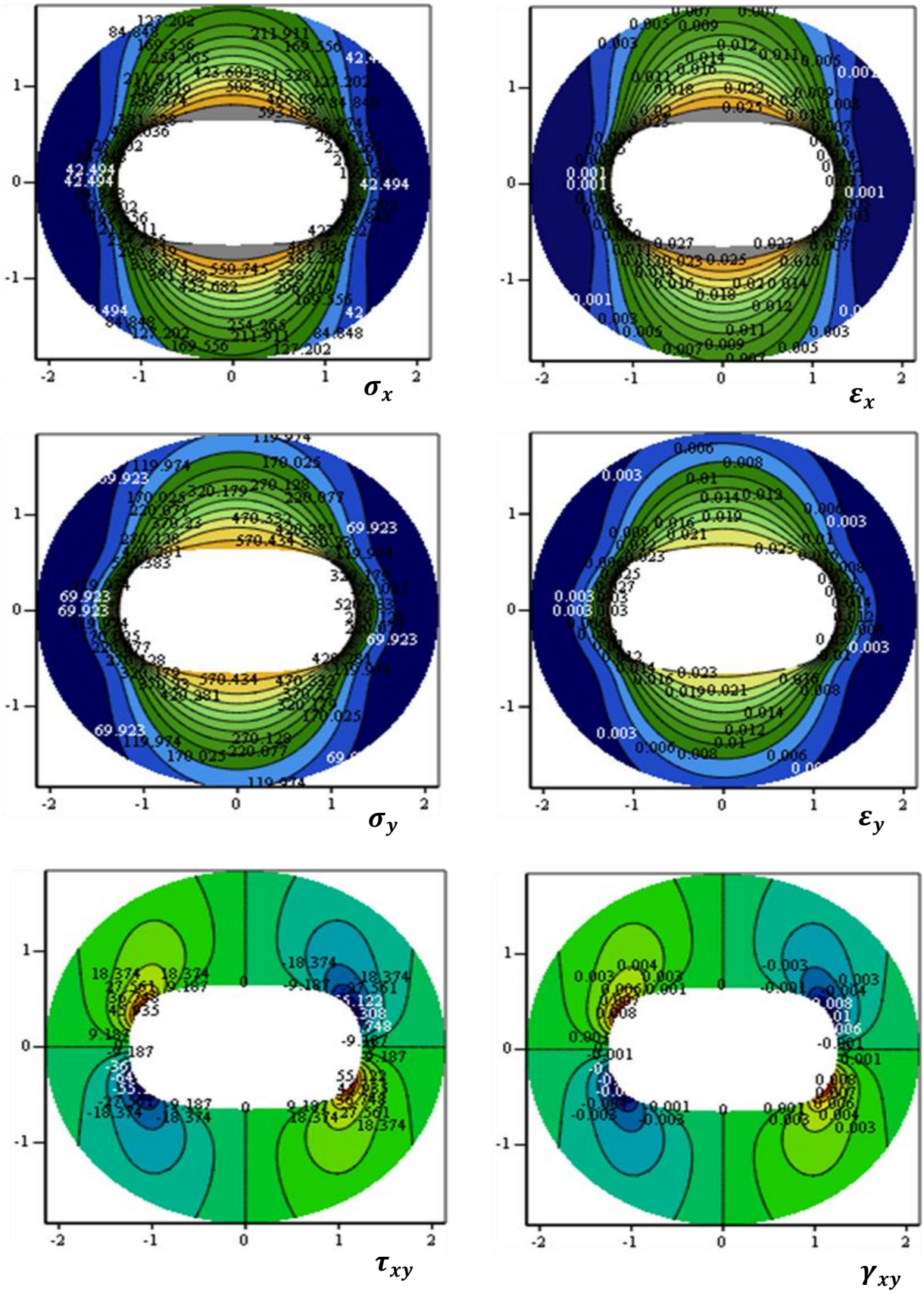


Рисунок 4.5 - Изолинии распределение напряжений на контуре туннеля только от напора воды (МПа)

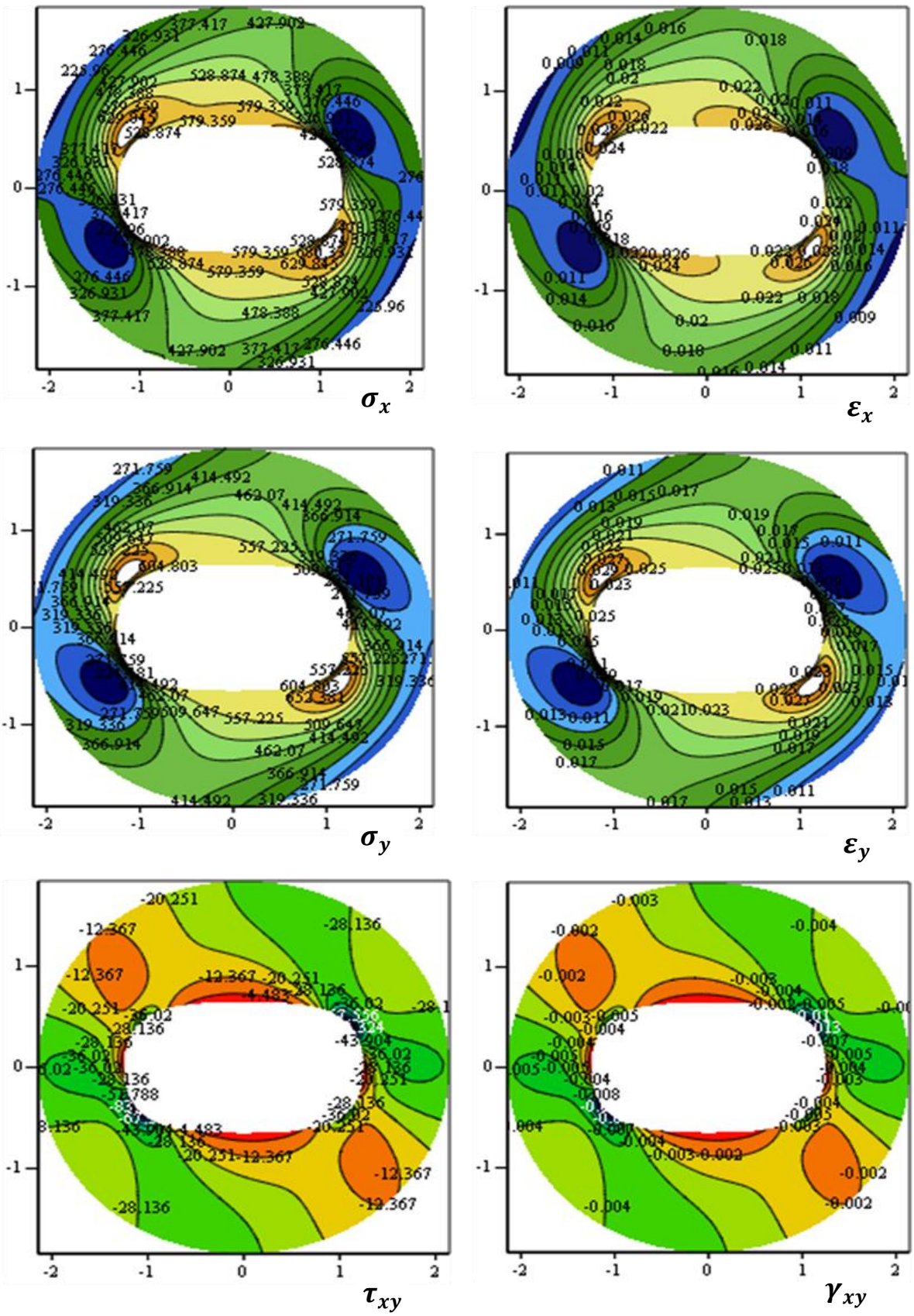


Рисунок 4.6 - Изолинии распределения напряжений (слева) и относительных деформаций вокруг напорного туннеля (справа) от совместных сил (МПа)

4.5. Распределение напряжений вокруг трапециевидного туннеля при действии напора воды

Состояние подобного напорного туннеля исследовано для случая, когда начальное состояние массива равно:

$$S_x=-40\ МПа;\ S_y=-\ 20\ МПа;\ S_{xy}=-10\ МПа.$$

Влияние образования туннеля на распределения напряжений определяется путем решения граничной задачи для плоскости *ХОУ* с трапециевидным отверстием, форма которого моделируется с помощью отображающей функции (3.32). Значения параметров отображающей функции заимствуем из второй строки табл. 3.7 и рассмотрим туннель с трапециевидным сечением, контур которого обозначен на рис. 3.28. через $(x4_2—y4_2)$. Сумма первых трех полей напряжений представлена в системе криволинейных координат, где для контурных точек туннеля при $\rho = 1$, расчеты представим в виде табл. 4.5 для каждого компонента напряжений при действии напора $P= -25$ МПа.

Таблица 4.5 - Напряжения на контуре туннеля с трапециевидным сечением от напора воды

$\sigma_\rho(1,\theta)$ (МПа)	$\sigma_\theta(1,\theta)$ (МПа)	$\tau_{\rho\theta}(1,\theta)$ (МПа)
- 25	5.132	0
- 25	5.794	$-1.021\cdot 10^{-14}$
- 25	7.876	$2.220\cdot 10^{-15}$
- 25	11.68	$-1.0066\cdot 10^{-14}$
- 25	17.751	$-1.599\cdot 10^{-14}$
- 25	26.857	$-2.487\cdot 10^{-14}$
- 25	39.634	0
- 25	55.109	$-4.619\cdot 10^{-14}$
- 25	67.746	$-5.862\cdot 10^{-14}$
- 25	68.337	$1.332\cdot 10^{-14}$

Результаты расчета напряжений от действия напора воды на контур туннеля представлены на рис. 4.7, а на рис. 4.8 представлены изолинии

компонентов относительных деформаций вокруг туннеля после действия (справа) напора воды.

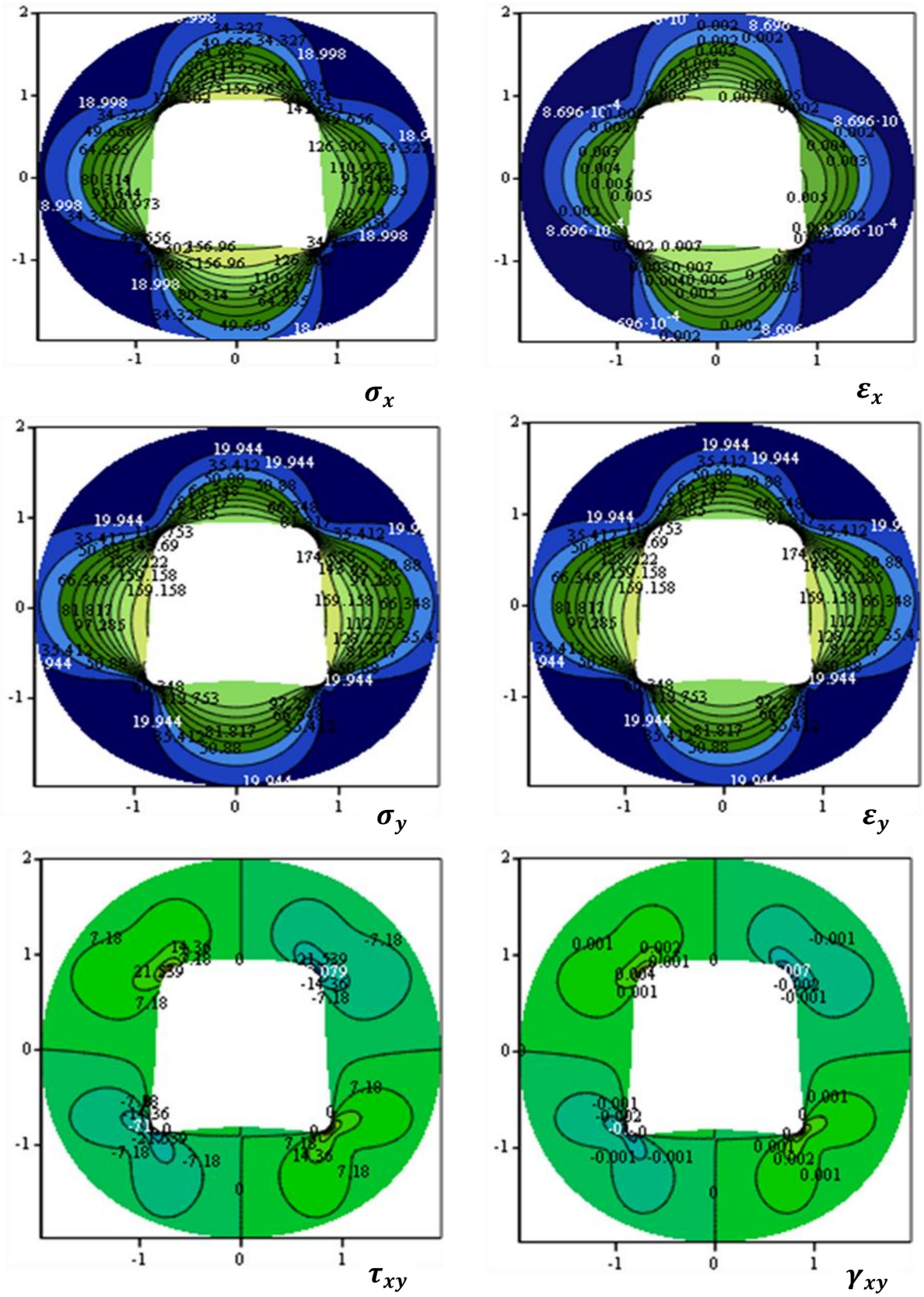


Рисунок 4.7 - Изолинии распределения напряжений на контуре только от напора воды (МПа)

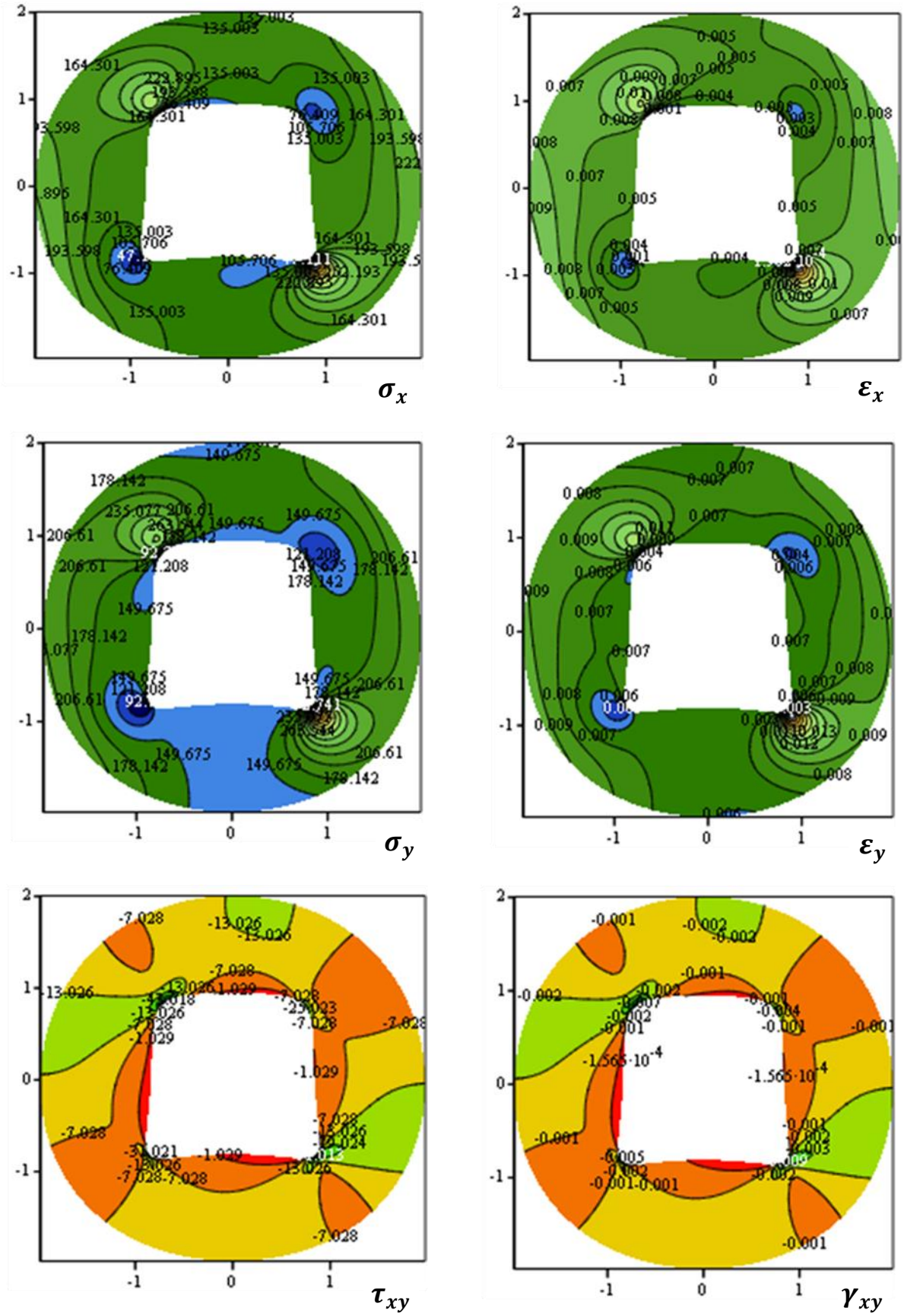


Рисунок 4.8 - Изолинии распределения напряжений (слева) и относительных деформаций (справа) вокруг с трапециевидным сечением напорного туннеля от совместных сил (МПа)

Распределение напряжений и деформаций вокруг напорного туннеля с учетом совместных сил изменяется не значительно, и из рис. 4.8 видно, что на своде и подошве напорного туннеля происходят не большие растяжения и на не больших участках показано сжатие, а величина допущенной погрешности граничных условий не более чем 10^{-14} - 10^{-15}.

4.6. Напряженное состояние вокруг сводчатого туннеля от напора воды

Необходимо установить влияние туннеля на $\sigma_x^н, \sigma_y^н, \tau_{xy}^н$ и на распределение напряжений и гидростатического напора вокруг туннелея, как в работе Б. Жумабаева, и это устанавливается путем решения граничной задачи для плоскости *xoy* с отверстием. Форма туннеля моделируется с помощью отображающей функции (3.35).

На контур туннеля действует гидростатический напор *(–P₀)*, следовательно здесь граничная задача по определению функций $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$ решена в (4.3).

Для контурных точек туннеля при $\rho = 1$, величины для каждого компонента напряжений представлены в виде таблицы 4.6.

Таблица 4.6 - Напряжений на контуре с сводчатым сечение туннеля от напора

$\sigma_\rho(1,\theta)$ (МПа)	$\sigma_\theta(1,\theta)$ (МПа)	$\tau_{\rho\theta}(1,\theta)$ (МПа)
-15	24.868	0
-15	24.442	$7.55 * 10^{-15}$
-15	23.328	$-2.665 \cdot 10^{-15}$
-15	21.917	$-1.776 \cdot 10^{-15}$
-15	20.922	$-3.553 \cdot 10^{-15}$
-15	19.730	$1.776 \cdot 10^{-15}$
-15	19.356	$-3.553 \cdot 10^{-15}$
-15	19.427	$1.776 \cdot 10^{-15}$
-15	19.906	0
-15	18.551	0

Найденные компоненты напряжений позволили с помощью Закона Гука [74] вычислить компоненты относительных деформаций. Значение модуля Юнга E= 1,71·10^4 МПа и коэффициента Пуассона $\nu = 0{,}3$. Числовые значения напряжеий принято:

$$S_x=-30\ МПа;\ S_y=-\ 25\ МПа;\ S_{xy}=-10\ МПа.$$

Решение системы для определения постоянных для полюса равны:

$M = M^{-1} \cdot M0$

$$MR = \begin{pmatrix} -1.936i \\ -0.987i \\ 1.451i \\ 1.936i \\ 0.987i \\ -1.451i \end{pmatrix}$$

$$X(\rho,\theta) = Re\big(\omega(\rho,\theta)\big), Y(\rho,\theta) = Im(\omega(\rho,\theta)),$$

$$CreateMesh(\sum \rho\theta, 1, 2, 0, 2\pi, 40, 40)$$

Поверхности напряжений размещены в массивах:

$$\sum \tau\theta(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} X(\rho,\theta) \\ Y(\rho,\theta) \\ \tau\rho\theta(\rho,\theta) \end{pmatrix};\ \sum \theta(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} X(\rho,\theta) \\ Y(\rho,\theta) \\ \sigma\theta(\rho,\theta) \end{pmatrix};\ \sum \rho(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} X(\rho,\theta) \\ Y(\rho,\theta) \\ \sigma\rho(\rho,\theta) \end{pmatrix}$$

В результате исследования создана математическая модель напряженно-деформированного состояния вокруг напорного туннеля со сводчатым поперечным сечением с развитыми вертикальными стенками при *P = -15 МПа.*

Граничные условия (4.1) для напорного туннеля в созданных моделях решены с высокой точностью и их погрешность составляет не более 10^{-15} степени.

Результаты расчета представлены на рис. 4.10 в виде изолиний компонентов напряжений и относительных деформаций напорного туннеля со сводчатым сечением от совместных сил. Все соотоношения, необходимые для вычисления компонентов напряжений и деформаций алгоритмизированы в нотациях MATHCAD.

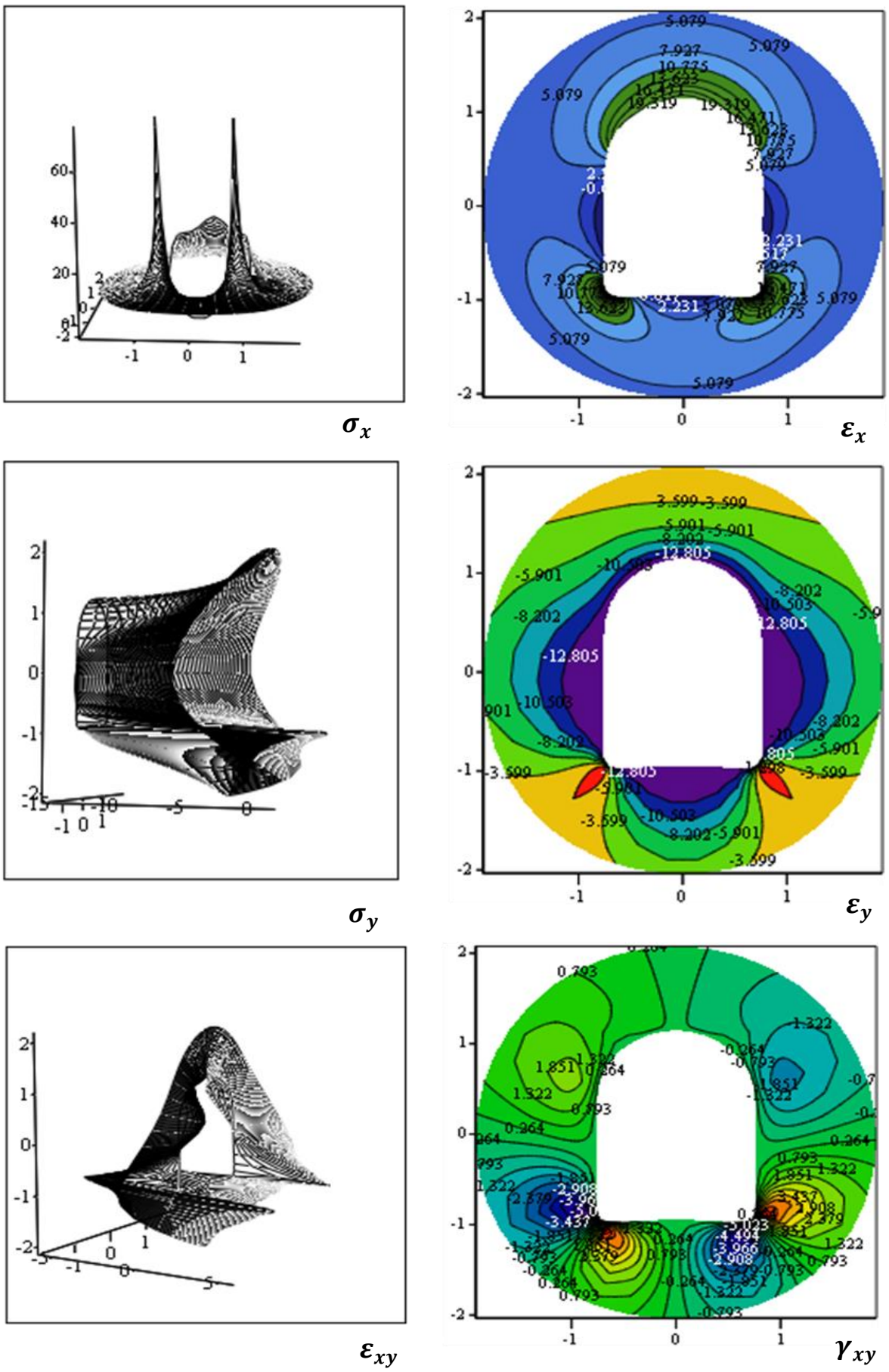


Рисунок 4.9 - Изолинии напряжений на поверхности (слева), распределение напряжений на контур туннеля только от напора воды (МПа)

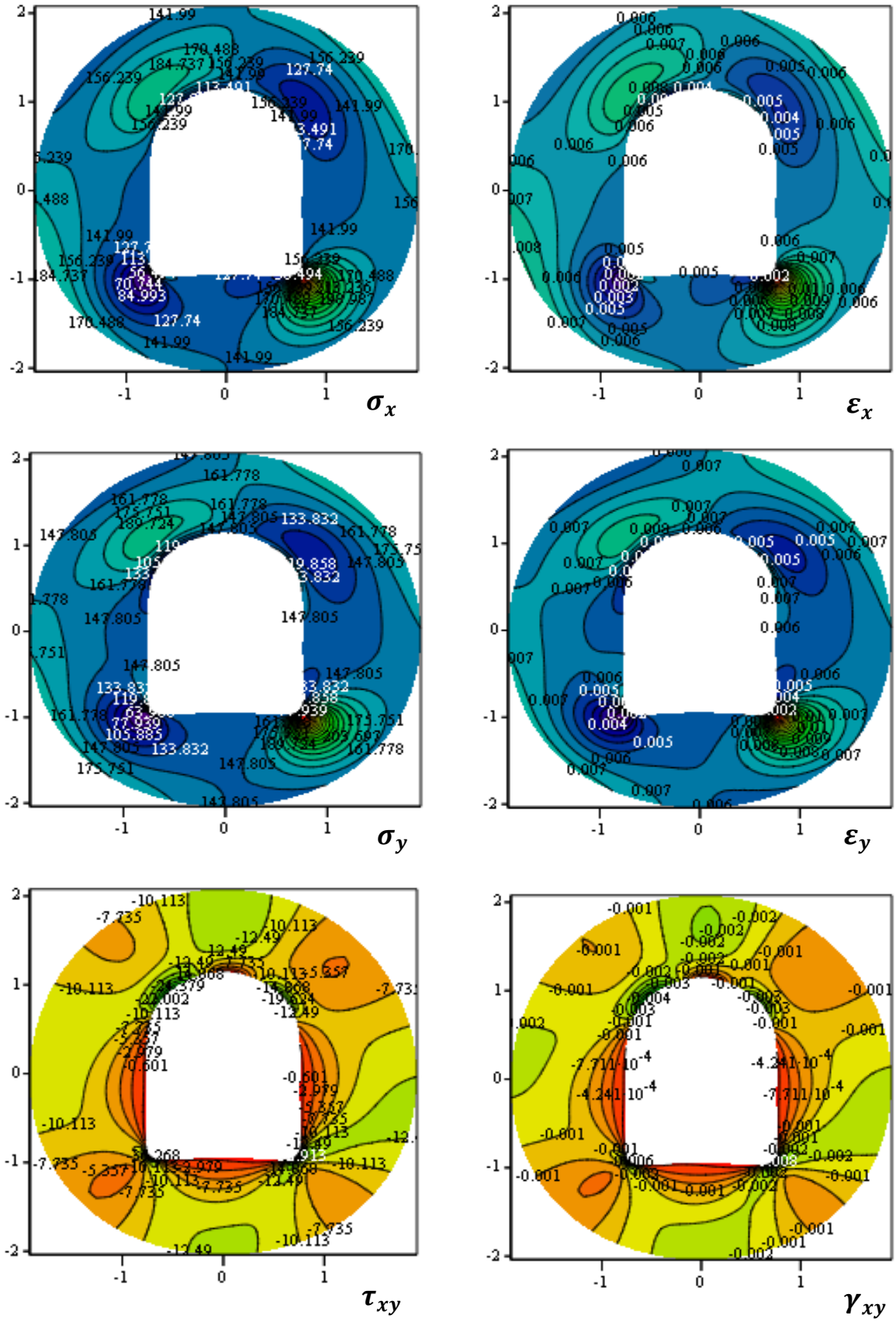


Рисунок 4.10 - Изолинии распределения напряжений вокруг туннеля (слева) и относительных деформаций (справа) напорного туннеля от совместных сил (МПа)

В результате иследований создана аналитическая модель напряженного и деформированного состояния туннеля со сводчатым сечением, когда на контур дейтсвует гидростатический напор. Модель пригодна для изучения и оценки напряженно-деформируемых состояний транспортных туннелей и горных выработок.

Аналитическая модель одновременно учитывает влияние на распределение напряжений и деформаций таких факторов, как рельеф гор, гравитационные, тектонические силы и гидростатический напор воды.

Все соотношения, необходимые для вычисления компонентов напряжений и деформаций алгоритимизированы в нотациях MATCHAD.

ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 4

1. Созданная модель напряженного и деформированного состояния (НДС) напорного туннеля с типовыми сечениями при $P = 0$ пригодна для оценки НДС вокруг транспортных и горных выработок с подобным сечением.
2. Состояние массивов горных пород вокруг туннелей и выработок в условиях действия только силы гравитации при $T_x = 0$ математически описывается с помощью созданной модели, как частный случай.
3. Ранее выполненные некоторые исследования выработок, расположенных в весомой полуплоскости, и вновь полученные результаты исследования вытекают из построенной модели (2.1), если при этом не учитывается влияние рельефа (второе поле напряжений).
4. Отдельные результаты этой главы опубликованы в работах [20-36].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации даны новые решения актуальной научно-технической задачи – моделирование и расчет напряженного и деформированного состояния массива пород вокруг напорных туннелей с учетом горного рельефа, совместного действия гравитационных сил и тектонического сжатия, формы поперечного сечения и глубины залегания.

Основные методические и практические результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. Разработан и реализован алгоритм расчета начального напряженного состояния массива горных пород вокруг туннеля в зоне влияния каньона, склона горы и межгорной впадины. Установлены значения горизонтальных, вертикальных и касательных напряжений в массиве вокруг туннеля. Численные показатели напряжений принимаются за граничные условия для определения их влияния на образованный туннель.
2. Методика определения напряжений вокруг туннеля в массиве заключается суммированием трех полей напряжений:

   - поле напряжений от интегрирования уравнений равновесия при действии силы гравитации горизонтального тектонического сжатия;
   - влияние форм горного рельефа на распределение напряжений;
   - влияние напора воды на распределение напряжений при образовании туннеля в массиве горных пород.

Использован математический аппарат двухмерной теории упругости с помощью конформных отображений полубесконечной области на полуплоскость и отверстий на внешности единичного круга.

3. Установлены новые закономерности распределения напряжений вокруг выработок и туннелей при совместном и раздельном действии гравитационных сил и тектонического сжатия.

4. Определено влияние напора воды на распределения напряжений и деформаций вокруг туннелей различной формы. Установлено, что напор воды вызывает растяжение в контурных точках туннеля и сжатие в направлении перпендикулярно к контуру.
5. Проведен расчет напряжений и деформаций вокруг туннелей в новой программной среде MATHCAD. Оформление результатов расчета в виде изолиний, поверхностей напряжений автоматизировано и не требует вмешательства исследователя.
6. Предложенная методика расчета напряжений и деформаций вокруг туннелей в новой программной среде MATHCAD принята для практического применения при инженерных расчетах для обоснования проектных решений по обеспечению устойчивости и выборе поперечных сечений горных выработок, и их креплении в горном массиве проектной организацией “Строительство малой гидроэлектростанции на реке Козубаглан Лейлекского района Баткенской области”.

Результаты материалов диссертации позволили:

- Обосновать надежность выбора места размещения горных выработок в массиве горных пород и устойчивость обнажений подземных горных выработок;
- Организовать выполнение мероприятий по установке крепления горных выработок (туннелей) с учетом начального и изменённого напряженного состояния массивов вокруг горных выработок.

Материалы диссертации будут использованы в дальнейшем:

- При выборе поперечных сечений горных выработок и их крепления в горном массиве;
- При обосновании проектных решений по обеспечению устойчивости горных выработок;

Основные результаты автора исследований опубликованы в 8 печатных изданиях и вошли в состав Проектов НИР в качестве госбюджетных по

заказу Министерства Образования и Науки Кыргызской Республики. Отдельные результаты диссертации внедрены в учебный процесс КНАУ и КРСУ (акты внедрения прилагаются в диссертационной работе).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Абдыгазиев, К.К.** Напряженно-деформированное состояние и устойчивость грунтовой плотины с асфальтобетонным экраном [Текст]: автореф. дис. ... канд. техн. наук / К.К. Абдыгазиев. – Бишкек, 1998. – 20 с.
2. **Абдылдаев, Э.К.** Напряженно-деформированное состояние массива горных пород вблизи выработок [Текст] / Э.К. Абдылдаев. – Фрунзе: Илим, 1990. – 162 с
3. **Авершин, С.Г.** Распределение напряжений вокруг горных выработок [Текст] / С.Г. Авершин, С.А. Балалаева, В.Н. Груздев. – Фрунзе: Илим, 1971. – 130 с.
4. **Айтматов, И.Т.** О естественных полях остаточных напряжений в горных породах магнетического и метиморфического генезиса [Текст] / И.Т. Айтматов // Современные проблемы механики сплошных сред / Ком. по теорет. и прикл. механике Кыргызстана. – Бишкек, 2011. – Вып. 13: Геомеханика массивов горных пород. – С. 28–55.
5. **Айтматов, И.Т.** Расчет устойчивости склонов и откосов участка дороги Базар-Коргон-Казарман [Текст] / И.Т. Айтматов, Б. Жумабаев, Э.А. Ким // Горная наука в Кыргызстане в XX веке. – Бишкек, 2000. – С. 363-367.
6. Напряженное состояние горных пород на рудных месторождениях Средней Азии и оценка их удароопасности [Текст] / И.Т. Айтматов, К.Д. Вдовин, К.Ч. Кожогулов [и др.] // Напряженное состояние породных массивов. – Новосибирск, 1978. – С. 112–115.
7. **Айтматов, И.Т.** Геомеханика рудных месторождений Средней Азии [Текст] / И.Т. Айтматов. – Фрунзе: Илим, 1987. – 246 с.
8. **Айталиев, Ш.М.** Конформно - отображающие функции-полиномы для некоторых несимметричных сечений' горных выработок [Текст] / Ш.М.

Айталиев, Ю.В. Мзаксон, А.И. Закамалдин // Изв. АН Каз. ССР, Сер. физ.-мат. – 1983. – № 5 (Деп. в ВИНИТИ. № 2904-83 от 31.05.82. - 79 с.).

9. **Алибаев, А.П.** Изучение напряженного состояния прибортового массива карьера при ведении горных работ в направлении от висячего бока к лежачему [Текст] / А.П.Алибаев // Ізденіс - Поиск: науч. журн. –Алматы, 2012. – № 2(1). – С. 192–196.

10. Оценка напряженно-деформированного состояния массивов пород (НДСМ) нагорных карьеров [Текст] / И.Т. Айтматов, Б.Жумабаев, И.К. Чунуев, Г.С. Исаева // Вопросы геомеханики и разработки месторождений полезных ископаемых. – Бишкек, 1997. – С. 4–8.

11. Формирование поля напряжений в районе активных разломов Тянь-Шаня [Текст] / И.Т. Айтматов, Н.Г. Ялымов, К.Ч. Кожогулов [и др.] // Геодинамика и напряженное состояние недр Земли. – Новосибирск, 1999. – С. 289-294.

12. **Аманалиев, А.А.** Напряженно-деформированное состояние пород вокруг подземных выработок, пройденных в слоистом массиве горной местности [Текст]: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / А.А. Аманалиев. – Бишкек, 1997. – 17 с.

13. **Абдиев, А.Р.** Геомеханическое обеспечение горных работ в условиях месторождения Кара-Кече [Текст]: моногр. / А.Р. Абдиев. – Бишкек: Изд-во КРСУ, 2014. – 147 с.

14. **Баялиева, Ж.А.** Влияние горизонтальной тектонической силы сжатия (растяжения) на распределение напряжений в зоне сопряжения уступа и склона [Текст] / Ж.А. Баялиева // Наука и новые технологии. – Бишкек, 2011. – № 2. – С. 14–24.

15. **Баялиева, Ж.А.** Распределение напряжений вблизи уступа склона горы от совместного действия распределенной нагрузки и тектонического сжатия [Текст] / Ж.А. Баялиева // Наука и новые технологии. – Бишкек, 2013. – № 5. – С. 48–54.

16. **Баялиева, Ж.А.** Характер распределения накопленной упругой энергии деформации в зоне уступов склона горы [Текст] / Ж.А. Баялиева // Современные проблемы механики сплошных сред. – Бишкек, 2014. – Вып. 19. – С. 217–229.
17. **Баялиева, Ж.А.** Напряженное и деформированное состояние вблизи уступов склона гор [Текст] / Ж.А. Баялиева // Вестн. Кырг. гос. ун-та стр-ва и архитектуры им. Н. Исанова. – 2015. – № 2(48). – С. 59-66.
18. **Баялиева, Ж.А**. Деформированное состояние горного массива в окрестности уступа склона горы [Текст] / Б. Жумабаев, Ж.А. Баялиева // Вестн. Кырг.-Рос. Славян. ун-та. – 2015. – Т. 15, № 9. – С. 168-172.
19. **Баялиева, Ж.А.** Методика моделирования и аналитическое описание напряженно-деформированного состояния массивов склона горы с уступами [Текст] / Ж.А. Баялиева, Б. Жумабаев // Вестн. Забайк. гос. ун-та. – 2016. – Т. 22, № 1. – С. 4-16.
20. **Ботоканова, Б.А.** Оценка геомеханических параметров массивов горных пород вокруг гидротехнических туннелей [Текст] / Б.А. Ботоканова // Вестн. Кырг. аграр. ун-та. – 2004. – № 2. – С. 16-17. https://elibrary.ru/item.asp?id=45801701
21. **Ботоканова, Б.А.** Расчет напряжённого состояния напорных гидротехнических туннелей [Текст] / Б.А. Ботоканова, Б. Жумабаев // Вестн. Кырг. аграр. ун-та. – 2004. – № 2. – С. 18-20. https://elibrary.ru/contents.asp?titleid=53416
22. **Ботоканова, Б.А.** Напряженное состояние пород вокруг гидротехнического туннеля, расположенного в наклонно-слоистом массиве [Текст] / Б.А. Ботоканова, Б. Жумабаев // Развитие инженерных методов в геомеханике: оценка, прогноз, контроль (Авершинские чтения): материалы Междунар. науч.-практ. конф. / ИФиМГП НАН КР. – Бишкек, 2005. – С. 216-224.
23. **Ботоканова, Б.А.** О сейсмонапряженном состоянии гидротехнического туннеля в горной местности [Текст] / Б.А. Ботоканова, Б. Жумабаев, А.А.

Аманалиев // Вестн. Кырг.-Рос. Славян. ун-та. – 2006. – Т. 6, № 7. – С. 56-59. https://elibrary.ru/contents.asp?titleid=10529

24. **Ботоканова, Б.А.** Моделирование форм поперечного сечения горных выработок и нагорных плотин с помощью конформного отображения [Текст] / Б.А. Ботоканова, Исмаилова К. Дж, Баялиева Ж.А. // Вестн. Кырг. аграр. ун-та. – 2009. – № 5 (16): Материалы Междунар. науч.-практ. конф.: «Развитие научно-технического потенциала мелиорации и водного хозяйства на современном этапе в КР». – С. 30-34.

25. **Ботоканова, Б.А.** Распределение напряжений вокруг напорного туннеля с эллиптическим (круглым) поперечным сечением [Текст] / Б.А. Ботоканова, Б. Жумабаев, А. А. Аманалиев // Современные проблемы механики сплошных сред: сб. тр. Междунар. конф.: «Проблемы геомеханики и освоения недр». – Бишкек, 2011. – Вып. 13: Геомеханика массивов горных пород. – С. 330-338. https://elibrary.ru/item.asp?id=28777820

26. **Ботоканова, Б.А.** Методика и программа расчета напряжений вокруг туннелей (выработок) [Текст] / Б.А. Ботоканова, А.А. Аманалиев, Б. Жумабаев // Современные проблемы механики сплошных сред: сб. тр. Междунар. конф. «Проблемы геомеханики и освоения недр». – Бишкек, 2012. – Вып. 15: Гидрогазодинамика, геомеханика и геотехнологии. – С. 102-111. https://elibrary.ru/item.asp?id=28926297

27. **Ботоканова, Б.А.** Распределение напряжений вокруг тоннеля с овальным поперечным сечением [Текст] / Б.А. Ботоканова, Б. Жумабаев // Современные проблемы механики сплошных сред: материалы Междунар. науч.-практ. конф. «Актуальные проблемы механики сплошных сред». – Бишкек, 2012. – Вып. 16: Гидрогазодинамика, геомеханика и геотехнологии. – С. 298-304.

28. **Ботоканова, Б.А.** Напряженно-деформированное состояние пород вокруг напорных гидротехнических тоннелей [Текст] / Б.А. Ботоканова, Б. Жумабаев // Вестн. Кырг. - Рос. Славян. ун-та. – 2013. – Т. 1: Материалы 2-

й Междунар. конф., посвящ. 20-летию образования КРСУ им. Б.Н. Ельцина и 100-летию Я.В. Быкова. – С. 181-186.

29. **Ботоканова Б.А.** Распределение напряжений вокруг гидротехнических туннелей [Текст] / Б.А. Ботоканова, Ж.А. Баялиева, А. К. Жамангапова // Вестн. Кырг. аграр. ун-та. – 2018. – № 1 (46). С. 28-32. https://elibrary.ru/item.asp?id=32351881

30. **Ботоканова, Б.А**. Моделирование и расчет напряженного и деформированного состояния напорных туннелей в массиве вблизи речного каньона [Текст] / Б.А. Ботоканова, Ж.А. Баялиева, Б. Жумабаев // Естеств. и техн. науки. – М., 2018. – № 5(119). – С. 108-118. https://elibrary.ru/item.asp?id=35209824

31. **Ботоканова, Б.А.** Методика математического моделирования напряженного состояния вокруг напорного туннеля, расположенного в горном массиве [Текст] / Б.А. Ботоканова, Б. Жумабаев // Естеств. и техн. науки. – М., 2018. – № 8 (122). – С. 235-243. https://elibrary.ru/item.asp?id=35574849

32. **Ботоканова, Б.А.** Математическое моделирование напряженного и деформированного состояния вокруг напорного туннеля, расположенного в зоне межгорной впадины [Текст] / Ж.А. Баялиева, Б.А. Ботоканова, Б. Жумабаев // Вестн. Забайк. гос. ун-та. – Чита, 2018. – Т. 24, № 7. – С. 4-17. https://elibrary.ru/item.asp?id=36309853

33. **Ботоканова, Б.А.** Моделирование и прогноз напряженного и деформированного состояния напорного туннеля треугольным сечением [Текст] / Б.А. Ботоканова, Б. Жумабаев // Вестн. науки и образования. – М., 2018. – Т. 2, № 6 (42). – С. 88-97. https://elibrary.ru/item.asp?id=35156386

34. **Ботоканова, Б.А.** Расчет напряжений и деформаций массивов вокруг напорного туннеля трапециевидным сечением [Текст] / Б.А. Ботоканова, Б. Жумабаев // European Journal of. Technical and Natural Sciences. – Vienna, 2018. – № 3. – С. 16-27. https://elibrary.ru/item.asp?id=36269620

35. **Ботоканова, Б.А.** О концентрации напряжений вокруг туннелей с типовыми поперечными сечениями [Текст] / Б.А. Ботоканова // Наука,

новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2018. – № 9. – С. 13-33. https://elibrary.ru/item.asp?id=37030543

36. **Ботоканова, Б.А.** Изменения полей напряжений вокруг туннеля со сводчатым сечением от действия напора воды [Текст] / Б.А. Ботоканова // Изв. ВУЗов Кыргызстана. – Бишкек, 2021. – № 5. – С. 14-20. https://elibrary.ru/item.asp?id=48220823

37. **Булычев, Н.С**. Механика подземных сооружений [Текст] / Н.С. Булычев. – М.: Недра, 1982. – 272 с.

38. **Гольдин, А.Л.** Использование метода конечных элементов для расчета напряженно-деформированного состояния треугольного каньона [Текст] /А.Л. Гольдин, А.П. Троицкий // Изв. Всесоюз. науч.-исслед. ин-та гидротехники. – 1971. – Т. 95. – С. 98–121.

39. **Гуттенберг, Б.** Сейсмичность земли [Текст] / Б. Гуттенберг, Ч. Рихтер. – М.: Иностр. лит., 1948. – 160 с.

40. **Динник, А.Н.** Распределение напряжений вокруг подземных горных выработок [Текст] / А.Н. Динник, А.Б. Моргалевский, Г.И. Савин // Труды совещания по управлению горным давлением. – М., 1938. – С. 176-185.

41. **Долежалова, Н.** Влияние крутизны бортов ущелья на трещинообразование в глинистых ядрах каменно-земляных плотин [Текст]: автореф. дис. … канд. техн. наук / Н. Долежалова. – М., 1968. – 20 с.

42. **Ержанов, Ж.С.** Метод конечных элементов в задачах механики горных пород [Текст] / Ж.С. Ержанов, Т.Д. Керимбаев. – Алма-Ата: Наука Каз. ССР, 1975. – 238 с.

43. **Ержанов, Ж.С.** Сейсмонапряженное состояние подземных сооружений в анизотропном слоистом массиве [Текст] / Ж.С. Ержанов, Ш.М. Айталиев, Ж.К. Масанов. – Алма-Ата: Наука, 1980. – 212 с.

44. **Жумабаев, Б.** Распределение напряжений в массивах пород с гористым рельефом [Текст] / Б. Жумабаев. – Фрунзе: Илим, 1988. – 190 с.

45. **Жумабаев, Б.** Напряженное состояние массивов речных каньонов и межгорных впадин в условиях влияния плотин и водохранилищи [Текст] /

Б. Жумабаев, Г.С. Исаева // Проблемы разработки полезных ископаемых в условиях высокогорья. – Фрунзе, 1990. – Ч.1. – С. 39.

46. **Жумабаев, Б.** О напряженном состоянии нетронутого массива пород в условиях гористого рельефа и тектонического сжатия [Текст] / Б. Жумабаев, Г.С. Исаева // Напряженное состояние массивов горных пород и управление горным давлением. – Фрунзе, 1990. – С. 464-470.
47. **Жумабаев, Б.** Распределение вокруг выработок, пройденных в зоне влияния каньона [Текст] / Б. Жумабаев, Г.Б. Ходосевич // Напряженное состояние и разгружение горных пород. – Бишкек, 1991. – С. 157–166.
48. **Жумабаев, Б.** Выбор рациональной конструкции грунтовой плотины с асфальтобетонным экраном [Текст] / Б. Жумабаев, К.К. Абдыгазиев // Традиции и новации в культуре университетского образования: материалы Междунар. науч. конф. – 1998. – Ч. 2. – С. 36-40.
49. **Жумабаев, Б.** Анализ работоспособности асфальтобетонных экранов грунтовой плотины на оплывание [Текст] / Б. Жумабаев, К.К. Абдыгазиев, Б.А. Чукин // Вопросы геомеханики и разработка месторождений полезных ископаемых. – Бишкек, 1997. – С. 183–186.
50. **Жумабаев, Б.** Влияние водохранилища на напряженно-деформированное состояние плотины [Текст] / Б. Жумабаев, К.Д. Исмаилова // Вестн. Каз. акад. транспорта и коммуникаций им. М. Тынышпаева. – 2005. – № 4. – С. 26–33.
51. **Жумабаев, Б.** Оценка геомеханического состояния плотины водоема [Текст] / Б. Жумабаев, К.Д. Исмаилова // Вестн. Кырг.-Рос. Славян. ун-та. – 2005. – Т. 5, № 3. – С. 88–91.
52. **Жумабаев, Б.** Расчет прочности откосов плотин водохранилищ и склонов речных каньонов [Текст] / Б. Жумабаев, К.Д. Исмаилова // Научно-технический потенциал КАУ по освоению горных регионов Кыргызстана.– Бишкек, 2003, – С. 134–137.
53. **Жумабаев, Б.** Влияние рельефа на напряженное состояние массива пород вблизи выработки [Текст] / Б. Жумабаев, Г.Б. Ходосевич, В.Я. Степанов //

Механика горных склонов, откосов и подземных сооружений. “Освоение подземного пространства”: материалы 9-ой Всесоюз. конф. по механике горных пород. – Фрунзе, 1990. – С. 333–339.

54. **Жумабаев, Б.** Аналитическая модель напряженного состояния массивов пород с анизотропными свойствами и горным рельефом [Текст] / Б. Жумабаев, А.А. Аманалиев // Проблемы механики и технологии: материалы Междунар. науч.-техн. конф. – Бишкек, 1994. – С. 16–22.
55. **Зенкевич, О.** Метод конечных элементов в технике [Текст] / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 543 с.
56. **Исаева, Г.С.** Метод расчета напряженно-деформированного состояния склонов гор в зонах влияния инженерных сооружений [Текст]: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. / Г.С. Исаева. – Бишкек, 1999. – 21с.
57. **Исмаилова, К.Д.** Разработка методических основ расчета напряженно-деформированного состояния нагорных плотин [Текст]: автореф. дис. ... канд. техн. наук / К.Д. Исмаилова. – Бишкек, 2010. –10 с.
58. **Исмаилова, К.Д.** Определение смещений и деформаций массивов тела плотин [Текст] / К.Д. Исмаилова // Вестн. Кырг. аграр. ун-та. – 2004. – № 3. – С. 239-244.
59. **Исмаилова, К.Д.** Сравнительная оценка устойчивости откосов плотин в различных режимах нагружения [Текст] / К.Д. Исмаилова // Аграрная наука и образование – Году Кыргызской государственности. – Бишкек, 2003. – С. 130–135.
60. **Казикаева, Д.М.** Геомеханические процессы при современной и повторной разработки руд [Текст] / Д.М. Казикаева. – М.: Недра, 1981. – 288 с.
61. **Калинин, Э.В.** Изменение напряженного состояния массива горных пород в основании глубоких речных долин при заполнении водохранилища руд [Текст] / Э.В. Калинин // Вопросы формирования и устойчивости высоких склонов. – М., 1970. – С. 97–104.

62. **Ким, Э.В.** Комплексная оценка устойчивости откосов дорог в рыхлых отложениях горных территорий Кыргызстана.[Текст]: автореф. дис. ... канд. техн. наук / Э.В. Ким. – Бишкек, 2003. – 21 с.
63. **Кирьянов, Д.В.** MATCAD 14 [Текст] / Д.В. Кирьянов. – СПб: БХВ – Петербург, 2007. – 685 с.
64. Распределение напряжений в породных массивах [Текст] / Г.А. Крупенников, Н.А. Филатов, Б.З. Амусин, В.М. Барковский. – М.: Недра, 1972. – 144 с.
65. **Кутепов, В.М.** Результаты изучений естественных напряжений в массивах трещиноватых пород горных склонов [Текст] / В.М. Кутепов // Вестн. МГУ, Сер. Геология. – 1966. – № 6. – С. 71-76.
66. **Лаврентьев, М.А.** Методы теории функций комплексного переменного [Текст] / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат**.** – М.: Наука, 1973. – 736 с.
67. **Марков, С.А.** Напряженное состояние пород и горное давление в структурах гористого рельефа [Текст] / С.А. Марков, С.Н. Савченко.– Л.: Наука, 1984. – 140 с.
68. **Мусхелишвили, Н.И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости [Текст] / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
69. **Напряженное состояние земной коры** (По измерениям в массиве горных пород) [Текст]. – М.: Наука, 1973. – 186 с.
70. **Нейбер, Г.** Концентрация напряжений [Текст] / Г. Нейбер. – М.; Л.: ОГИЗ, 1947. – 204 с.
71. **Савин, Г.Н.** Распределение напряжений около отверстий [Текст] / Г.Н. Савин. – Киев: Наук. Думка, 1968. – 887 с.
72. **СНиП-7-81.** Строительные нормы и правила. Нормы проектирования. Строительство в сейсмических районах [Текст]. – М.: Стройиздат, 1982. – 49 с.
73. **Тер-Мартиросян, З. Г.** Напряженное состояние горных массивов в поле гравитации [Текст] / З.Г. Тер-Мартиросян, Д.М. Ахпателов // Докл. АН СССР, 1976. – Т. 220, № 2. – С. 311-314.

74. **Тимошенко, С.П.** Теория упругости [Текст] / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
75. **Усенов, К.Ж.** Напряженно-деформированное состояние подработаемых бортов и днищ карьеров [Текст] / К.Ж. Усенов, К.Ч. Кожогулов – Жалалабад: Жалалабад. гос. ун-т, 2002. – 167 с.
76. **Угодчиков, А.Г.** Построению конформно-отображающих функций при помощи электромоделирования и интерполяционных полиномов Лангранжа [Текст] / А.Г. Угодчиков. – Киев: Наук. Думка, 1966. – 99 с.
77. **Фотиева, Н.Н.** Расчет крепи подземных сооружений в сейсмически активных зонах [Текст] / Н.Н. Фотиева. – М.: Недра, 1980. – 222 с.
78. **Jumabaev, B.J.** Durability of dams and Protection of Land Stock from Mud – Torrents and floods in Mountain Regions. PROCEEDINGS OF THE 7th INTERNATIONAL SYMPOSIUM HIGH MOUNTAIN REMOTE SENSIGN CARTOGRAPHY [Text] / B.J. Jumabaev, K.D. Ismailova // Institute for Cartography Dresden University of Technology. – Germany, 2004. – С. 97.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

УТВЕРЖДАЮ
Генеральный директор
ОсОО ПИ «Ак-Башат»
Заирбеков Ж.М.

«16» 10 2021 г.

№ 1А

Акт внедрения результатов научно-исследовательских работ

Автор внедрения: Ботоканова Бактыгул Асанкожоевна, соавтор: д.т.н., проф Жумабаев Б.

О реализации научных результатов, полученных в диссертации Ботокановой Бактыгул Асанкожоевны на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 25.00.20 – "Геомеханика, разрушение пород взрывом, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика" на тему: "Оценка напряженно-деформированного состояния массивов вокруг напорных туннелей методом математического моделирования"

Краткая аннотация: Создан алгоритм расчета и установлена закономерность распределения начального напряженного состояния массивов с гористым рельефом в зоне глубокого каньона, склонов горы, межгорных впадин.

Дано аналитическое описание напряженно-деформированного состояния массива горных пород вокруг туннелей, учитывающее типовые формы сечений туннеля.

Определено влияние напора воды на распределение напряжений вокруг горных выработок и туннелей для разных форм поперечных сечений.

Эффект от внедрения: Реализация материалов диссертации Ботокановой Бактыгул Асанкожоевны позволила:

- Обосновать надежность и устойчивость по выбору места размещения горных выработок в массивах горных пород;
- Организовать выполнение мероприятий по установке и креплений горных выработок с учетом начального и измененного напряженного состояния массивов вокруг горных выработок;

Материалы диссертации в дальнейшем будут использованы в следующих разработоках:

- При выборе поперечных сечений горных выработок и креплений на горном массиве;
- При обосновании проектных решений по обеспечению устойчивости горных выработок.
- При оценке напряженно – деформированное состояние подземных горных выработок и туннелей, коммуникаций, рудников вокруг массивов горных пород, расположенных в горной местности.

Реализация материалов диссертации Ботокановой Бактыгул Асанкожоевны предоставит возможность получить необходимый положительный эффект:

- В необходимых местах выработки горных пород за счет математического моделирования и применения методики расчетов напряженно-деформированных состояний горных выработок с использованием многовариантных компьютерных расчетов.
- Проведение необходимых измерений начального и напряженно-деформированного состояния горных выработок в массивах горных пород с помощью компьютерного моделирования напряжений, по сравнению с методом "разгрузки".

Место и время внерения: 2020-21 год пойма и надпойменные участки реки Джеты -Купрюк Лейлекского района Баткенской области.

Форма внедрения: Предложено алгоритм программы расчета напряжений в области горных разработок по трассе напорного деривационного трубопровода и внутристанционной дороги малой ГЭС с помощью программного обеспечения MATHCAD, допускающий учет совместного или раздельного действия силы гравитации, горизонтальных тектонических сил и гидростатического напора.

Председатель комиссии
исполнительный директор: **Баймырза уулу Азамат**

Члены комиссии:
Специалист отд. ГТС **Назеков Н.А.**
Специалист отд.технологии: **Тенизбаев Н.Т.**

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

«УТВЕРЖДАЮ»
Ректор Кыргызского Национального
Аграрного Университета им. К.И. Скрябина
академик НАН КР,
профессор Нургазиев Р.З.

«31» 03 2022 г.

Акт внедрения результатов научно-исследовательских работ

Автор внедрения: Ботоканова Бактыгул Асанкожоевна, соавтор: д.т.н., проф Жумабаев Б.

О реализации научных результатов, полученных в диссертации Ботокановой Бактыгул Асанкожоевны на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 25.00.20 - «Геомеханика, разрушение пород взрывом, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика» на тему «Оценка напряженно-деформированного состояния массивов вокруг напорных туннелей методом математического моделирования»

Краткая аннотация: При разработке математической модели были реализованы следующие научные результаты, полученные в кандидатской диссертации Ботокановой Б.А.

Определены функции Мусхелишвили, через которые вычисляются напряженное и деформированное состояния массивов горных пород вокруг гидротехнических туннелей.

Получена оценка количественных и качественных значений влияющих факторов, совокупность которых определяются обусловленными параметрами в вариации сочетаний различных нагрузок, которые учтены в построенных аналитических решениях.

Разработана новая математическая и автоматизированная технология исследования напряженно-деформированного состояния массивов горных пород вокруг туннелей в программной среде MATHCAD, в которой исключены все возможные погрешности в вычислениях, допустимые при распределении действительных частей от мнимых функций комплексных переменных и построения графических элементов при анализе полученных результатов при расчете распределения напряжений.

В аналитической модели напряженного состояния туннелей, базированной на математическом аппарате конформного отображения отверстий на внешности круга, использованы более 15 моделированных типовых проектных поперечных сечений туннелей и горных выработок.

В аналитической модели учтены действия в массиве силы гравитации, сейсмики, тектонического сжатия и гидростатического напора на контур туннеля в склоне горы, формы и размеры сечений туннелей.

Эффект от внедрения: Реализация материалов диссертации Ботокановой Бактыгул Асанкожоевны позволила:

Материалы диссертации использованы в проектах и результаты диссертации вошли в состав НИР. Проекты выполнены в КРСУ в качестве госбюджетных по заказу Министерства образования и науки Кыргызской Республики.

По результатам реализации получен следующий положительный эффект:

Расчеты напряжений в массиве вокруг туннелей автоматизированы в программной среде MATHCAD, что удобно при использовании программы для подготовки студентов на базе программ бакалавриата и магистратуры.

Место и время внерения: Созданная математическая модель напряженного состояния напорных туннелей и программа расчета в диссертации Ботокановой Б.А. в 2021-2022 учебный год внедрен в учебный процесс на кафедре Горного гидротехнического строительства по направлению 750500 - «Строительство, факультета Гидромелиорации, экологии и землеустройства Кыргызского национального аграрного университета им. К.И. Скрябина в следующих дисциплинах: «Проведение и крепление горных выработок», «Решение инженерных задач методом математического моделирования» и для расчетно-графических заданий по расчету напряженно-деформированного состояния вокруг гидротехнических туннелей, а также в научно-исследовательской работе магистрантов по программе «Гидротехнические сооружения».

Форма внедрения: Предложен автоматизированный алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния массивов вокруг гидротехнических туннелей и графическое оформление результатов, которые получены в программной среде MATHCAD.

Декан факультета Гидромелиорации, экологии и землеустройства, д.с.х.н., профессор **А.К. Самыкбаев**

И.о. заведующего кафедры Горного гидротехнического строительства, к.т.н., доцент **К.К. Абдыгазиев**

Председатель УМК факультета Гидромелиорации, экологии и землеустройства, к.т.н., доцент **Б.О. Аскаралиев**

ПОДПИСИ Самыкбаева А.К., Абдыгазиева К.К., заверяю.
Нач. отдела кадров
"31" 03 2022 г.

ПРИЛОЖЕНИЕ3

«УТВЕРЖДАЮ»

Ректор Кыргызско-Российского Славянского Университета им. Б.Н. Ельцина академик НАН КР Нифадьев В.И.

«16» 02 2022 г.

Акт внедрения результатов научно-исследовательских работ

Автор внедрения: Ботоканова Бактыгул Асанкожоевна, соавтор: д.т.н., проф Жумабаев Б.

О реализации научных результатов, полученных в диссертации Ботокановой Бактыгул Асанкожоевны на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 25.00.20 - «Геомеханика, разрушение пород взрывом, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика» на тему «Оценка напряженно-деформированного состояния массивов вокруг напорных туннелей методом математического моделирования»

Краткая аннотация: При разработке математической модели и расчета устойчивости напорных гидротехнических туннелей были реализованы следующие научные результаты, полученные в кандидатской диссертации Ботокановой Бактыгул Асанкожоевны:

Реализован алгоритм расчета отображающей функции, допускающей моделирование состояния массивов вокруг гидротехнических туннелей с помощью ПЭВМ;

Аналитически описан и усовершенствован алгоритм расчета напряженно-деформированного состояние горных пород вокруг туннелей от совместного действия силы гравитации, сейсмических, горизонтальных, тектонических сил, при отсутствии напора и под действием гидростатического давления воды с помощью программной среды MATHCAD;

Эффект от внедрения: Реализация материалов диссертации Ботокановой Бактыгул Асанкожоевны позволила:

Материалы диссертации использованы в следующих материалах и результаты диссертации вошли в состав НИР: «Оценка динамики инженерных сооружений (плотин) в горных условиях и выработка методов моделирования механики конструкционных материалов» (Отчет 2012 г., стр. 55-77), «Прочность и деформируемость горных пород

при больших давлениях в условиях глубоких выработок и высокогорья» (Отчет 2013 г., стр. 27-46), «Прочность и деформируемость горных пород при больших давлениях в условиях глубоких выработок и высокогорья» (Отчет 2014 г., стр. 19-44), «Сейсмическая опасность и сейсмозащита инженерных сооружений в условиях Кыргызстана» (Отчет 2016 г., стр. 20-32). Проекты выполнены в КРСУ в качестве госбюджетных по заказу Министерства образования и науки Кыргызской Республики.

По результатам реализации получен следующий положительный эффект:

Расчеты напряжений в массиве вокруг туннелей автоматизированы в программной среде MATHCAD, что удобно при использовании программы для подготовки студентов на базе программ бакалавриата и магистратуры.

Место и время внерения: Полученные результаты диссертационной работы Ботокановой Б.А. внедрен в учебном процессе на Естественно-техническом факультете КРСУ по предметам при подготовке кадров по специальности «Механика» в составе дисциплин: «Математические методы двумерной теории упругости» и «Специальные главы и практикум по высшей математике» в 2018-2019 учебный год, для бакалавров по направлению 08.03.01 – РФ, 750500 – КР «Строительство», профиль «Гидротехническое строительство» по дисциплине «Проведение горных выработок» для выполнения расчетно-графических заданий по расчету напряженно-деформированного состояния упругих областей с отверстиями, которые являются моделью для расчета прочности и устойчивости гидротехнических туннелей и горных выработок.

Форма внедрения: методическое пособие, программы расчета для решения инженерных задач методом математического моделирования, а также в научно – исследовательской работе обучающихся.

Предложен автоматизированный алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния массивов вокруг гидротехнических туннелей и графическое оформление результатов, которые получены в программной среде MATHCAD.

Декан факультета Архитектуры, дизайна и строительства, доктор архитектуры, проф. **Р.М. Муксинов**

Председатель УМК факультета Архитектуры, дизайна и строительства, д.т.н., профессор **Р.М. Муксинов**

Заведующий кафедрой ВР и ИД, д.т.н., профессор **Г.И. Логинов**

Подпись заверяю
Начальник
Управления кадров
ГОУВПО КРСУ
Васильев Е.Н.